Производящие функции.

This post was originally written by zscoder for his blog on codefoces.com. You can see the original post here

Translated by pakhomovee

В этой части большое количество примеров взято из книги generatingfunctionology.
$[n]$ обозначает множество $\{1, 2, \ldots n\}$. Что же такое производящие функции?

Содержание

Простые примеры OGF **2**

OGF для функции многих переменных **2**

Экспоненциальные производящие функции. **3**

Алгебраические манипуляции с производящими функциями **3**
- Сложение . . . 3
- Сдвиг . . . 3
- Умножение на n . . . 3
- Свертка/Умножение . . . 4
- Степень . . . 4
- Префиксные суммы . . . 4

Список полезных рядов **4**

Производящие функции в задачах на подсчет **4**
- Числа Каталана, revisited . . . 4
- Несколько задач с перестановками . . . 5
- Подсчет графов . . . 6
- Формула включений-исключений . . . 6

Доказываем интересные теоремы через производящие функции **7**
- Формула Бине и решение линейных рекуррент . . . 7
- Цикл длины k^2 в перестановке длины n . . . 8
- Трюк для доказательства комбинаторных эквивалентностей . . . 9

Пусть у нас есть последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Для последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, мы определяем обычную производящую функцию (OGF) как $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Например, для последовательности фибоначчи f с членами $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, $F(x) = 0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \ldots$.

Мы просто записываем последовательность a и i-й её член умножаем на x_i. Далее мы суммируем все члены и получаем какую-то кодировку. С таким представлением нашей последовательности часто проще работать, чтобы найти необычные зависимости.

Есть и другие типы производящих функций, например, экспоненциальная (EGF) и Дирихле. Далее в этом посте мы рассмотрим несколько примеров EGF, а для начала поговорим про OGF.

Введем опредение: для последовательности $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, обозначим $[x^n]A(x) = a_n$ (то есть коэффициент при x^n в A).

Простые примеры OGF

Начнем с простого примера. Чему равна OGF последовательности $1, 1, 1, ..., 1$? По определению, мы получаем $A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$. Звучит знакомо, не правда ли?

$A(x)$ - это просто геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{x}$! Поэтому, мы можем записать формулу суммы геометрической прогрессии $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Замечание. А не нужно ли нам задуматься о сходимости последовательности, то есть о том, что должно быть выполнено $|x| < 1$? Это зависит от того, что мы хотим делать с нашим рядом. Большую часть времени мы будем работать с формальными рядами, что позволяет нам игнорировать проблему сходимости. Однако это также означает, что мы не можем заменить x на какое-то конкретное значение без должного внимания. Например, при $x = 2$ $A(x)$ расходится, а при $x = 0.5$ сходится. Мы почти не будем заниматься анализом рядов.

Мы можем оперировать производящими функциями как обычными алгебраическими выражениями. Рассмотрим классический пример.

Пример. Числа Каталана c_n определяются как $c_0 = 1$ и $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$ для $n \geq 0$. Найти OGF для c_n.

Опять же, домножим обе части равенства на x^n и просуммируем для всех корректных n. Получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_i x^i c_{n-i} x^{n-i}$$

В левой части равенства находится просто $C(x) - 1$.

Как преобразовать правую часть? Утверждается, что это просто $xC(x)^2$. Рассмотрим раскрытие скобок у $C(x)^2$. Какой будет коэффициент при x^n? $C(x)^2 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)$, поэтому x^n может быть получено только если мы выберем $c_i x^i$ из первой скобки и $c_{n-i} x^{n-i}$ из второй скобки Поэтому, коэффициент при x^n в $C(x)^2$ равен $\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$, как мы и хотели.

Получаем $C(x) - 1 = xC(x)^2$, что является квадратным уравнением на $C(x)$!

Решая его, получаем $C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Но какой знак выбрать? Если мы выберем $+$, то числитель $\to 2$, когда $x \to 0$, а знаменатель $\to 0$, поэтому в 0 дробь примет бесконечно большое значение. Однако $C(x)$ может быть разложенно в степенной ряд и при $x = 0$, $C(x)$ должно сходиться в $x = 0$. Поэтому мы должны выбрать знак - $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ (можно проверить, что оно сходится к $c_0 = 1$ при $x = 0$).

Замечание. Попробуйте смотреть на стандартные последовательности и пробовать находить их OGF с нуля. Будет очень полезно научиться находить ответ из рекурренты.

OGF для функции многих переменных

Мы не обязаны ограничивать себя функциями одной переменной.Мы можем получать OGF от нескольких переменных. Рассмотрим простой пример.

Из OGF от многих переменных, можно узнать много интересного для одной переменной. Например,

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x-xy} = \frac{1}{1-x(y+1)} = \sum_{k\geq 0}(y+1)^k x^k$$

Поэтому, $[x^n]F(x,y) = (y+1)^n$. Однако $[x^n]F(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k$, значит $\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k = (y+1)^n$. Отметим, что это дает такой же результат как и теорема для суммы $(y+1)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + ... + \binom{n}{n}y^n$.

Гораздо интереснее посмотреть на $[y^k]F(x,y)$ относительно OGF x.

Получаем $F(x,y) = \frac{1}{(1-x)-xy} = \frac{\frac{1}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}y} = \frac{1}{1-x}(1 + \frac{x}{1-x}y + (\frac{x}{1-x})^2y^2 + \dots)$

Сравнивая коэффициенты, получаем $[y^k]F(x,y) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$, откуда $\sum_{n=0}^{\infty} f(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

Это интересует нас, так как позволяет раскрыть $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$, использую биномиальные коэффициенты! IA именно $[x^{n-k}]\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \binom{n}{k}$, т.е. $[x^n]\frac{1}{(1-x)^k} = \binom{n+k-1}{k-1}$. Это очень полезно при работе с суммами, где k фиксированно, а n меняется.

Экспоненциальные производящие функции.

Рассмотрим немного другой тип производящих функций - экспоненциальные (EGF).

Определение. Пусть $a_0, a_1, a_2, ...$ - последовательность. Тогда EGF a (назовем её $A(x)$) определяется как $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!}x^i$.

Другими словами, EGF это OGF, где каждый член a_i поделен на $i!$. Странно делить на $i!$? Рассмотрим пример, чтобы пролить свет на эту загадку.

Пример. Пусть b_n обозначает n-е число Белла, то есть количество способов распределить $\{1, 2, ..., n\}$ на непересекающиеся множества. Например, $b_3 = 5$, потому что есть 5 способов разделить [3] на множества: $123; 12, 3; 13, 2; 1, 23; 1, 2, 3$. Найдите EGF b_n.

Алгебраические манипуляции с производящими функциями

Рассмотрим некоторые манипуляции с производящими функциями и то, как они меняют нашу последовательность. Здесь, a_i, b_i являются последовательностями, а $A(x)$ и $B(x)$ соответствующими им производящими функциями (OGF или EGF в зависимости от контекста).

Сложение

Для OGF и EGF, $C(x) = A(x) + B(x)$ генерирует последовательность $c_n = a_n + b_n$.

Сдвиг

Для OGF, $C(x) = x^k A(x)$ генерирует последовательность $c_n = a_{n-k}$ где $a_i = 0$ for $i < 0$. Для EGF, нужно проинтегрировать $A(x)$ k раз для такого же эффекта.

Для OGF, $C(x) = \frac{A(x)-(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}$ генерирует последовательность $c_n = a_{n+k}$.

Для EGF, $C(x) = A^{(k)}(x)$ генерирует последовательность $c_n = a_{n+k}$, где $A^{(k)}(x)$ обозначает A продифференцируемую k раз.

Умножение на n

Для OGF и EGF, $C(x) = xC'(x)$генерирует последовательность $c_n = na_n$.

Вообще, можно получить производящую функцию, где каждый из коэффициетов умножен на $P(n)$ - многочлен от n.

Свертка/Умножение

Это самая важная операция над производящими функциями. Для OGF, $C(x) = A(x)B(x)$ генерирует последовательность $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Для EGF, $C(x) = A(x)B(x)$ ggенерирует последовательность $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. Из-за этого EGF полезна, если рекуррента содержит факториалы или биномиальные коэффициенты.

Степень

Это прямое следствие умножения.

Для OGF, $C(x) = A(x)^k$генерирует последовательность $c_n = \sum_{i_1+i_2+...+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$

Для EGF, $C(x) = A(x)^k$ генерирует последоватльность $c_n = \sum_{i_1+i_2+...+i_k=n} \frac{n!}{i_1! i_2! ... i_k!} a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$

Префиксные суммы

Это работает только для OGF, но всё равно полезно. Пусть мы хотим сгенерировать последовательность $c_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Тогда, можно использовать $C(x) = \frac{1}{1-x} A(x)$.

Почему? Раскрыв правую часть, получим $(1 + x + x^2 + ...)A(x)$. Чтобы получить коэффициент при x^n, равный c_n, мы должны выбрать x^i из первой скобки и $a_{n-i}x^{n-i}$ из $A(x)$, откуда получаем суммированием по i в точности $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Список полезных рядов

Приведем список часто используемых производящих функций.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{n \geq 0} x^n - \ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$(1-x)^{-k} = \binom{k-1}{0} x^0 + \binom{k}{1} x^1 + \binom{k+1}{2} x^2 + ... = \sum_{n} \binom{n+k-1}{n} x^n$$

Во многих случаях мы будем хотеть свести производящие функции к композиции этих;

На странице 57 generatingfunctionology есть более полный список.

Производящие функции в задачах на подсчет

Производящие функции являются сильным инструментом в комбинаторике. У них есть очень много приложений, поэтому мы разберем только некоторые из них. Для большего числа применений стоит обратиться к книгам generatingfunctionology и Enumerative Combinatorics.

Числа Каталана, revisited

Мы уже показали, что OGF чисел Каталана это $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Пусть мы хотим найти closed-form формулу для c_n. Конечно, известно, что$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$,но давайте получим это с нуля. Мы хотим "раскрыть"$C(x)$, но у нас есть квадратный корень, который нам помешает.

Определение. Для комплексного r и целого неотрицательного n определим:

$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)...(r-(n-1))}{n!}$.

Теорема. Пусть r - вещественное число, а n неотрицательное целое число. Тогда $(1+x)^r = \sum_{n\geq 0} \binom{r}{n} x^n$.

Тогда наша функция принимает вид:

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot ... \cdot \frac{-(2n-3)}{2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (-4)^n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-3))}{2^n} \cdot \frac{(-4)^n}{n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} -2^n \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{1}{n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{-2\cdot (2n-2)!}{(n-1)!n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} -\frac{2}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

Откуда, $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left[1 - 1 - \sum_{n\geq 1} -\frac{2}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^n\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$, как мы и хотели.

Несколько задач с перестановками

Для перестановки $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, рассмотрим граф из ребер вида $i \to p_i$. Известно, что он состоит из набора циклов.

Задача. Найдите количество перестановок длины n с k циклами.

Пусть $c_n = (n-1)!$ - число перестановок длины n, являющиеся циклом. Определим $C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} x^n$ - EGF c. Пусть f_n - ответ на задачу, а $F(x)$ - EGF f. Важное наблюдение: $F(x) = \frac{1}{k!} C(x)^k$.

Пусть циклы занумерованны от 1 до k. Для каждой перестановки занумеруем каждый элемент номером цикла, которому он принадлежит. Пусть длины цикла i равна a_i (а $\sum a_i = n$). Тогда есть c_{a_i} способов переставить элементы в i-м цикле и $\frac{n!}{a_1!a_2!...a_k!}$ способов назначить пометки для циклов элементам перестановки. В нашей задаче порядок на циклах не важен, поэтому нужно разделить ответ на $k!$ в конце.

Таким образом, ответ равен

$$\frac{n!}{k!} \sum_{a_1+a_2+...+a_k=n} \frac{c_{a_1}c_{a_2}...c_{a_k}}{a_1!a_2!...a_k!}$$

. Проверьте, что $\sum_{a_1+a_2+...+a_k=n} \frac{c_{a_1}c_{a_2}...c_{a_k}}{a_1!a_2!...a_k!} = [x^n]C(x)^k$, поэтому $F(x) = \frac{1}{k!}C(x)^k$ ($n!$ исчезает в $F(x)$, потому что мы работаем с EGF).

Пусть нам нужно найти ответ для (n,k). Мы можем посчитать ответ за $O(n\log n)$, посчитав экспоненту за $O(n\log n)$ ($P(x)^k = \exp(k\ln(P(x)))$).

Задача. Посчитайте количество перестановок длины n , что все длины циклов в них принадлежат множеству S.

Воспользуемся трюком из предыдущей задачи, но примем $c_i = 0$ при i не в S.

Нам нужно найти $[x^n]\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} C(x)^k = [x^n]\exp(C(x))$, поэтому нам нужно посчитать сумму по всем значениям k (количеству циклов), что можно спокойно сделать.

Задача. Найдите ожидаемое число циклов в перестановке длины n.

Чтобы найти матожидание, нужно посчитать сумму количества циклов по всем перестановкам длины n. Пусть g_n обозначает сумму длин циклов по всем перестановкам длины n , $G(x)$ - EGF g. Используя C из предыдущей задачи, мы должны найти (обратите внимание на дополнительный множитель k, который и отличает этот пример от предыдущего) $[x^n]G(x) = [x^n]\sum_{k\geq 0}\frac{k}{k!}C(x)^k = [x^n]C(x)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}C(x)^{k-1} = [x^n]C(x)\exp(C(x))$

Но $C(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$. Поэтому, $C(x)\exp(C(x)) = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)}$.

Для $n \geq 1$, $[x^n](-\ln(1-x)) = \frac{1}{n}$. Используя префиксные суммы, $[x^n]\frac{-\ln(1-x)}{1-x} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Так, $[x^n]G(x) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Так как $\frac{g_n}{n!}$ - ожидаемое количество циклов в перестановки длины n, наш ответ равен $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$- n-е гармоническое число!

Подсчет графов

Задача. Найдите количествонеориентированных графов с n помеченными вершинами, что степень каждой из них равна 2.

Каждый такой граф является объединением циклов. Рассмотрим производящую функцию для одной "компоненты"в объекте, который мы хотим посчитать. Пусть d_n - количество неориентированных циклов длины n, а $D(x)$ - её EGF. Тогда $D(x) = \sum_{n\geq 3}\frac{(n-1)!}{2n!}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n} = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)$.

Пусть $G(x)$ обозначает EGF ответа. По той же причине, что и раньше, $G(x) = \exp(D(x))$, поэтому $G(x) = \exp\left(\ln\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}$, и мы можем посчитать коэффициент при x^n, чтобы получить ответ.

Рассмотрим более сложный пример.

Задача. Найдите количество двудольных вершинно-помеченных графов на n вершинах.

Применить подход из предыдущей задачи звучит очень заманчиво. Мы можем попробовать связать количество двудольных графов с количеством связных двудольных графов. Но можем ли мы найти число связных графов просто? К сожалению, нет.

Вместо этого, покрасим каждую вершину графа в красный или синий, после чего посчитаем количество покрашенных двудольных графов (не обязательно связных). Пусть мы выбрали k вершин красного цвета и $n-k$ вершин синего цвета. Тогда есть $\binom{n}{k}$ способов выбрать покраску и $2^{k(n-k)}$ способов выбрать ребра (потому что каждое ребро должно быть между вершинами разных цветов). Поэтому, количество покрашенных графов на n вершинах равно $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}2^{k(n-k)}$. Пусть это a_n,а её EGF равно $A(x)$.

Далее, соотнесем количество покрашенных двудольных графов с количеством покрашенных связных двудольных графов. Пусть b_n обозначает число связных двудольных графов на n вершинах, а $B(x)$ - его EGF.

Использую те же соображения, что и раньше, получаем $A(x) = \exp(B(x))$, откуда $B(x) = \ln(A(x))$.

Возвращаясь к исходной задаче, посчитаем количество связных двудольных графов на n вершинах (c_n и $C(x)$, соответственно, их количество и EGF). Это просто, так как каждая компонента двудольного графа может быть покрашена ровно двумя способами, откуда $C(x) = \frac{B(x)}{2}$.

Наконец, обозначим за d_n количество двудольных графов на n вершинах и её EGF за $D(x)$. Тогда,мы имеем $D(x) = \exp(C(x))$ по той же причине. Откуда, $D(x) = \exp(C(x)) = \exp\left(\frac{B(x)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(A(x))}{2}\right) = \sqrt{A(x)}$, что является очень интересной формулой!

Формула включений-исключений

Рассмотрим последний пример, который демонстрирует принцип включений-исключений.

Рассмотрим шахматную доску $n \times n$ (некоторые клетки чёрные, а остальные белые). Пусть мы как-то узнали последовательность r_k - количество способов расположить k не бьющих друг друга ладей на белых клетках доски (то есть, чтобы ни одна пара ладей не была в одной и той же строке/столбце доски). Пусть e_k обозначает число способов расположить n не бьющих друг друга ладей, что ровно k из них расположены на белых клетках. Можем ли мы выразить e_k через r_k?

Мы воспользуемся таким трюком: посчитать количество объектов, удовлетворяющих точным ограничениям сложнее, чем количество тех, которые удовлетворяют ограничениям вида $\geq$. Для подмножества белых клеток S определим $N(S)$ как число способов расставить n не бьющих друг друга ладей на доске, что есть хотя бы одна ладья в каждой клетке из S.

Пусть $n_k = \sum\limits_{|S|=k} N(S)$.

Свяжем n_k с e_k. Рассмотрим подмножество T размера t и способ расставить n не бьющих друг друга ладей, что они занимают все клетки из T и только их. Каждое k-элементное подмножество T нужно учесть в n_k.

Получаем рекурренту $n_k = \sum\limits_{t\geq 0} \binom{t}{k} e_t$.

Пусть $N(x)$ и $E(x)$ - OGF n_k и e_k., соответственно. Мы можем вывести простую зависимость между $N(X)$ и $E(x)$.И правда: $N(x) = \sum\limits_{k\geq 0} x^k \sum\limits_{t\geq 0} \binom{t}{k} e_t = \sum\limits_{t\geq 0} e_t \sum\limits_{k\geq 0} \binom{t}{k} x^k = \sum\limits_{t\geq 0} e_t (x+1)^t = E(x+1)$.

Получаем простую зависимость: $E(x) = N(x-1)$.

n_k обычно найти легче. В нашей задаче, $n_k = r_k(n-k)!$, так как мы можем выбрать множество S, как как любое множество из k не бьющих друг друга ладей, а потом расставить остальных $n-k$ ладей $(n-k)!$ способами.Откуда, $N(x) = \sum\limits_{k\geq 0} r_k(n-k)!x^k$ и $E(x) = \sum\limits_{k\geq 0} r_k(n-k)!(x-1)^k$.

Таким образом, можно получить e_j из коэффициентов $E(x)$.

Доказываем интересные теоремы через производящие функции

Число разбиений на нечетные слагаемые =Число разбиений на различные слагаемые (1).

Разбиение n на k слагаемых - это мультимножество положительных чисел размера k, элементы которого в сумме дают n. Например, $\{3,1,1\}$ - разбиение 5 на 3 слагаемых. При этом порядок элементов не важен: $\{3,1,1\}$ и $\{1,3,1\}$ являеются одним и тем же разбиением.

Докажем обобщение факта (1).

Задача. Докажите, что количество разбиений n на слагаемые, размеры которых не делятся на $k+1$ равно количеству разбиений n на слагаемые, что каждое число встречается среди них не более k раз.

При $k=1$ мы получаем стандартную теорему.

Зафиксируем k и скажем, что $A(x)$ - OGF для первого объекта, а $B(x)$ - OGF второго объекта. Так как выбор разбиения эквивалентен выбору количества вхождений каждого числа в него, получим:

$$B(x) = \prod_{r\geq 1} (1 + x^r + x^{2r} + ... + x^{kr})$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$= \prod_{r\geq 1} \left(\frac{1 - x^{r(k+1)}}{1 - x^r} \right)$$

Все числители сокращаются со знаменателями, в которых $r = (k+1) * p$:

$$= \prod_{r\geq 1, (k+1)\nmid r} \left(\frac{1}{1 - x^r} \right)$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$= \prod_{r\geq 1, (k+1)\nmid r} (1 + x^r + x^{2r} + ...) = A(x)$$

Формула Бине и решение линейных рекуррент

Пусть f_n обозначает n-е число Фибоначчи (с $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$). Вы могли слышать о формуле Бине, которая гласит $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

Это выглядит довольно нелогичено, но на самом деле получается напрямую из производящих функций.Вспомните, что $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ является OGF f. Здесь можно воспользоваться простейшими дробями.

Пусть $-\gamma_1, -\gamma_2$ являются корнями уравнения $1-x-x^2=0$ (где $\gamma_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \gamma_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$). Тогда запишем: $F(x)=\frac{A}{x+\gamma_1}+\frac{B}{x+\gamma_2}$. Проведя вычисления, получаем $F(x)=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\left(\frac{1}{1-\gamma_1 x}-\frac{1}{1-\gamma_2 x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{j\geq 0}\gamma_1^j x^j-\sum_{j\geq 0}\gamma_2^j x^j\right)$.

Сравнивая коэффициенты, получаем $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma_1^n-\gamma_2^n)$. Записав $\gamma_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\gamma_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, получаем формулу Бине.

Этот метод обобщается на произвольные линейные рекурренты.

Цикл длины k^2 в перестановке длины n

Задача. Какова вероятность, что случайная перестановка не имеет цикла, длина которого равна квадрату какого-то натурального числа?

Пусть в нашей перестановке длины n есть a_i циклов длины i (т. е. $\sum_{i\geq 1} ia_i=n$). Сколько есть таких перестановок? Несложно получить следующую формулу: $\frac{n!\prod_{i\geq 1}((i-1)!)^{a_i}}{\prod_{i\geq 1}(i!)^{a_i}\cdot\prod_{i\geq 1}(a_i!)}=\frac{n!}{\prod_{i\geq 1}i^{a_i}\cdot\prod_{i\geq 1}(a_i!)}$ (Подсказка: Для начала считайте, что циклы пронумерованы, разделите элементы по циклам, после чего распределите элементы внутри каждого цикла и разделите на какие-то факториалы, чтобы не учесть ничего несколько раз).

Пусть $c(a)$ обозначает число перестановок длины $n=a_1+2a_2+...$ с длинами циклов a, а $p(a)$ обозначает вероятность того, что перестановка длины n $n=a_1+2a_2+...$ имеет длины циклов a. Тогда, $c(a)=\frac{n!}{\prod_{i\geq 1}i^{a_i}\cdot\prod_{i\geq 1}(a_i!)} and p(a)=\frac{c(a)}{n!}$

Рассмотрим производящую функцию от бесконечного число переменных $x_1, x_2, ...$:

$$C(x,y)=\sum_{n\geq 0}\frac{y^n}{n!}\sum_{a_1+2a_2+...=n, a_i\geq 0}c(a)x_1^{a_1}x_2^{a_2}...$$

Мы знаем, как найти $c(a)$, поэтому можно переписать $C(x,y)$ как

$$C(x,y)=\left(\sum_{a_1\geq 0}\frac{(yx_1)^{a_1}}{a_1!1^{a_1}}\right)\left(\sum_{a_2\geq 0}\frac{(y^2x_2)^{a_2}}{a_2!2^{a_2}}\right)...=\exp(yx_1)\exp\left(y^2\frac{x_2}{2}\right)...=\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{y^ix_i}{i}\right).$$

Откуда для фиксированных длины циклов a $a=(a_1,a_2,...)$, $p(a)=[x_1^{a_1}x_2^{a_2}...]\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{y^ix_i}{i}\right)$.

Вернемся к исходной задаче. Назовем a хорошей, если $a_j=0$ для всех j, являющимися точными квадратами. Мы хотим найти $\lim_{n\to\infty}\sum_{a \text{ good}}[y^nx_1^{a_1}x_2^{a_2}...]\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{y^ix_i}{i}\right)$. Мы можем "заменить"$x_j=1$ для всех j , не являющимися точными квадратами, чтобы отметить, что мы не будем обращать внимания на степень x_j для таких j.Так как $a_j=0$ для точных квадратов, нам нужно найти

$$\lim_{n\to\infty}[y^n]\exp\left(\sum_{i=z^2}\frac{y^ix_i}{i}+\sum_{i\neq z^2}\frac{y^i}{i}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[y^n]\exp\left(\sum_{i=z^2}\frac{y^i(x_i-1)}{i}+\sum_{i\geq 1}\frac{y^i}{i}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[y^n]\exp\left(\sum_{i=z^2}\frac{y^i(x_i-1)}{i}-\ln(1-y)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[y^n]\frac{1}{1-y}\exp\left(\sum_{i=z^2}\frac{y^i(x_i-1)}{i}\right)$$

Пусть $A(y)$ - OGF $a_n = [y^n] \exp\left(\sum_{i=z^2} \frac{y^i(x_i-1)}{i}\right)$, тогда, воспользовавшись префиксными суммами, получаем,что наш предел равен $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 0} a_i$ (предположив, что сумма сходится).

Мы можем устремить сумму к бесконечности,заменив $y = 1$ в $\exp\left(\sum_{i=z^2} \frac{y^i(x_i-1)}{i}\right)$, нас интересуют только члены без x_i, поэтому мы устанавливаем $x_i = 0$(для i равных точному квадрату), чтобы получить $\lim_{n\to\infty} [y^n] \frac{1}{1-y} \exp\left(\sum_{i=z^2} \frac{y^i(x_i-1)}{i}\right) = \exp\left(\sum_{i=z^2} -\frac{1}{i}\right) = e^{-\frac{\pi^2}{6}}$, что является ответом (вспомните, что $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Трюк для доказательства комбинаторных эквивалентностей

Идея заключается в том, что легче разбираться с рядом, полученным из производящей функции вместо того, чтобы разбираться с суммами напрямую.

Задача. Найти $\sum_{k\geq 0} \binom{k}{n-k}$ для фиксированного n.

Пусть ответ на нашу задачу $f(n)$. Рассмотрим OGF f, равное $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$. Получаем

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} \binom{k}{n-k} x^n$$

Поменяем порядок суммирования

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \binom{k}{n-k} x^n$$

Тогда внутренняя сумма станет очень легко вычислима $\sum_{n\geq 0} \binom{k}{n-k} x^{n-k}$, ведь это просто $\sum_{r\geq 0} \binom{k}{r} x^r$ для $r = n-k$!

Вынесем x^k, получая

$$= \sum_{k\geq 0} x^k \sum_{n\geq 0} \binom{k}{n-k} x^{n-k}$$

Используя binomial theorem получаем

$$= \sum_{k\geq 0} x^k (1+x)^k$$

По формуле суммы геометрической прогресси получаем

$$= \sum_{k\geq 0} (x(1+x))^k$$

$$= \frac{1}{1-x-x^2}$$

Узнаете? Это $\frac{1}{x}F(x)$, где $F(x)$ - OGF для чисел Фибоначчи! Так, $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n\geq 0} f_{n+1}x^n$; сравнивая коэффициенты получаем $f(n) = f_{n+1}$, - $(n+1)$-е число Фибоначчи!

Этот метод полезен, если вы получили какое-то выражение с двойным или тройным суммированием биномиальных коэффициентов, а вам нужно решение за $O(n)$.

В качестве упражнения, упростите:

$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{n+m}{k}$ (есть простая биекция, понимаете какая?). Это выражение может быть полезно для упрощения выражений с биномиальными коэффициентами.

Явные применения производящих функций

Рассмотрим несколько задач на явное применение производящих функций.

Задача. Дано дерево T на n вершинах. Для подмножества вершин дерева S обозначим за $f(S)$ наименьший размер поддерева T, которое содержит все вершины из S. Для $1 \le k \le n$ найдите сумму $f(S)$ по всем подмножествам S размера k. $n \le 2 \cdot 10^5$

Решение. За $t(S)$ обозначим наименьшее поддерево, содержащее все вершины из S.

Зафиксируем k. Мы хотим посчитать сумму $f(S)$ двумя способами. Если мы рассмотрим некоторую вершины v, то не совсем ясно, как посчитать количество множетсв S размера k, что $t(S)$ содержит v. Но если мы зафиксируем ребро e, то становится понятно, что $t(S)$ содержит e тогда и только тогда, когда есть элементы S, расположенные по разные стороны от ребра e. Таким образом, множеств S, в которых лежит e будет $\binom{n}{k} - \binom{a}{k} - \binom{n-a}{k}$. Поэтому сумма количеств ребер из $t(S)$ по всем множествам S это просто $\sum_{e \in E} \binom{n}{k} - \binom{a}{k} - \binom{n-a}{k}$, где a - количество вершин по одну из сторон от ребра e. Чтобы получить сумму количеств вершин, к этому числу нужно прибавить $\binom{n}{k}$.

Найти значение a для каждого ребра можно найти при помощи dfs. Пусть мы посчитали $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Если мы посчитаем $\sum_{i=1}^{n-1} \binom{a_i}{k}$ для всех $1 \le k \le n$,, то мы решим задачу. Осталось научиться делать это быстро.

Пусть c_i обозначает количество раз, которое число i встречается в массиве a. Тогда нам нужно найти $ans_k = \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{i}{k}$.

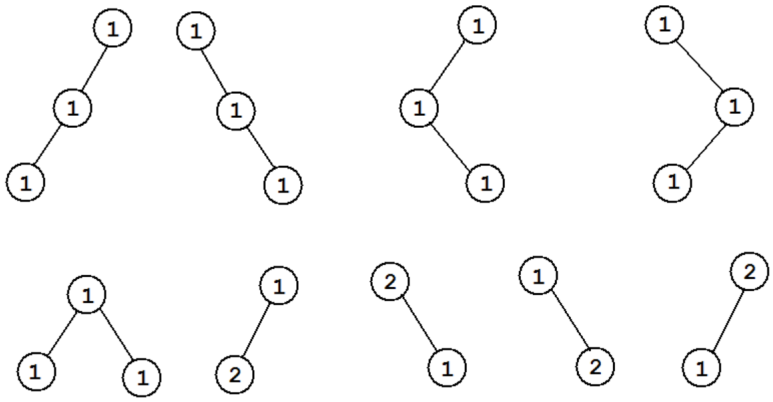
$$ans_k = \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} c_i (i!) \cdot \frac{1}{(i-k)!}$$

Нам нужно научиться считать $\sum_{i=0}^{n} c_i (i!) \cdot \frac{1}{(i-k)!}$ быстро для всех k. Несложно заметить, что наша сумма выглядит как свертка двух последовательностей. Пусть $F(x) = \sum_{i \ge 0} f(i) x^i$ и $G(x) = \sum_{i \ge 0} g(i) x^i$. Тогда мы сможем получить $\sum_{i \ge 0} f(i) g(k-i)$ из коэффициентов $F(x)G(x)$.

Но как найти $f(i)$ и $g(i)$? Понятно, что можно выбрать $f(i) = c_i(i!)$. Тогда $g(i) = \frac{1}{(-i)!}$.Но $(-i)!$ не определен для $i > 0$... Ну и ладно.Мы всегда можем сдвинуть нашу последовательность: сделать $g(M+i) = \frac{1}{(-i)!}$ для большого M. Тогда $g(i) = \frac{1}{(M-i)!}$, что мы спокойно считаем. Вместо того, чтобы брать в качестве ответа коэффициент при x^k из $F(x)G(x)$ нам нужен будет коэффициент при x^{k+M}.

Самая сложная часть в задачах такого типа - свести их к свертке двух производящих функций. Далее мы рассмотрим примеры на более сложные техники.

Задача. Дано множество положительных чисел $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Вершинно-взвешенное подвешенное бинарное дерево назовем хорошим, если веса всех вершин содержатся в S. Вес такого дерева определим как сумму весов его вершин. Найдите количество различных хороших деревьев веса s для всех $q \le s \le m$. Обратите внимание, что левый и правый дети в этой задачи отличаются (см. рисунок для лучшего понимания, он является примером для $n = 2, c = \{1, 2\}, m = 3$).



Решение. Обозначим ответ за f_s, а за $F(X)$ - его OGF. Попытаемся найти рекурренту для f_s. Очевидно, что $f_0 = 0$. Для $s > 0$