How to find a GF

Во всех задачах, если не сказано противное, надо надо найти (возможно экспоненциальную) производящую функцию описанной последовательности в замкнутом виде, то есть без многоточий, знаков Σ и Π и подобных.

1. Числа Фибоначчи: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

2. Число разбиений n на **а)** неупорядоченные **б)** упорядоченные слагаемые, не превосходящие 4.

3. Найти *обычную* производящую функцию (в замкнутом виде) $\binom{n}{k}$, то есть $F(x,y)$: $[x^n y^k]F(x,y) = \binom{n}{k}$.

4. Дана производящая функция $P(x)$, считающая количество каких-то объектов каждого размера ($[x^n]P(x)$ = количеству объектов размера n). Выразить через нее производящую функцию, считающую упорядоченные пары этих объектов, в котрых элементы различны (но, возможно, одного размера). Размер пары — сумма размеров ее элементов.

5. Количество непронумерованных деревьев на n вершинах, в которых у каждой вершины $\leqslant 2$ детей.

6. Числа Бернулли: $B_0 = 1, B_n = \dfrac{-1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}$.

Последние 3 задачи очень плохо упорядоченны по сложности (никак).

7. Найти *смешанную* производящую функцию чисел Эйлера I-го рода $E(n,k)$ — количество перестановок из n элементов, среди которых ровно k меньше предыдущих, то есть $F(x,y) : [x^n y^k]F(x,y) = \dfrac{E(n,k)}{n!}$.

8. Найти *смешанную* производящую функцию чисел Стирлинга II-го рода $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество способов разбить n пронумерованных элементов на k непронумерованных подмножеств, то есть $S(x,y) : [x^n y^k]S(x,y) = \dfrac{\left\{ {n \atop k} \right\}}{n!}$.

9. Числа Белла B_n — количество способов разбить n пронумерованных элементов на непронумерованные подмножества.

1	2	3	4	5	6	7	8	9