Введение

Определение 1. Вектор — семейство направленных отрезоков на плоскости, получающихся друг из друга параллельным переносом. Одну из граничных точек вектора называют его началом, а другу — концом. Направление вектора задаётся от начала к концу, причём на чертеже конец вектора отмечают стрелкой. Начало вектора называют также точкой его приложения.

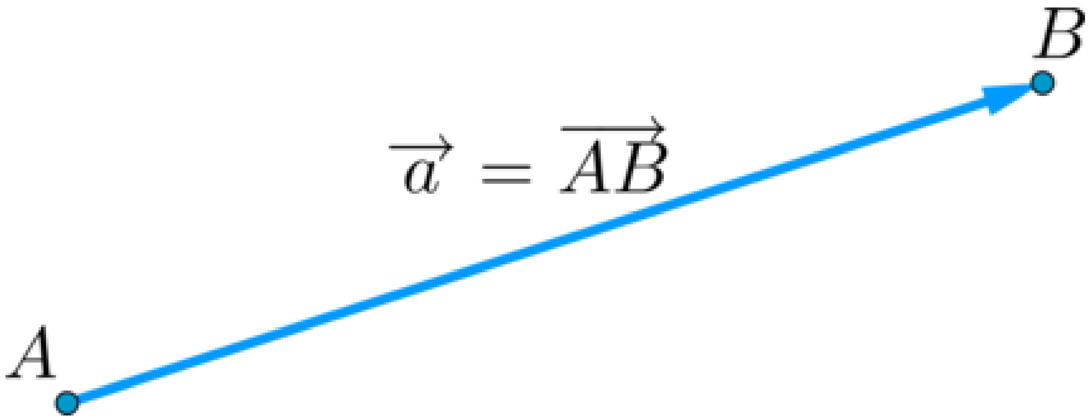


Рис. 1: Вектор

Определение 2. Радиус-вектор —вектор, начало которого, лежит в начале координат.

Определение 3. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ — это расстояние между его концами, то есть

$$\sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

.

Тригонометрические функции

Определим $\sin, \cos$ через тригонометрическую окружность.

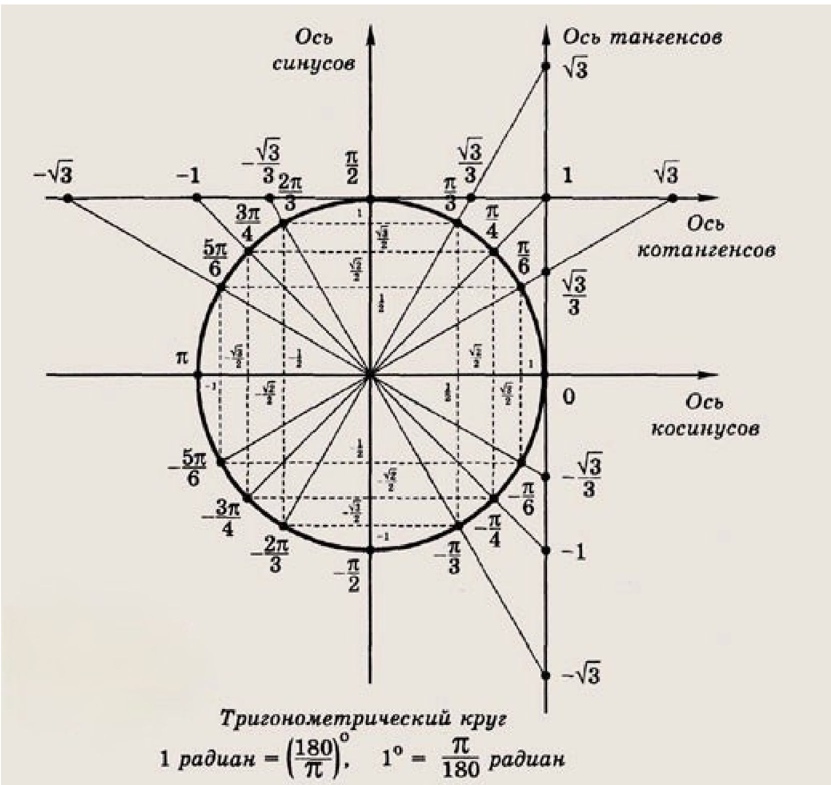


Рис. 2: Тригонометрическая окружность

Определение 4. Тангенс $\operatorname{tg}(\alpha)$ — отношение синуса и косинуса, то есть $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Для углов геометрии обычно используют **радианы**.

Определение 5. Радиан —(от латинского radius спица колеса), угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности. Радиан принимается за единицу измерения углов.

π радиан соответсвует 180°, 2π радиан — 360°, а один радиан это $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

Полярные координаты

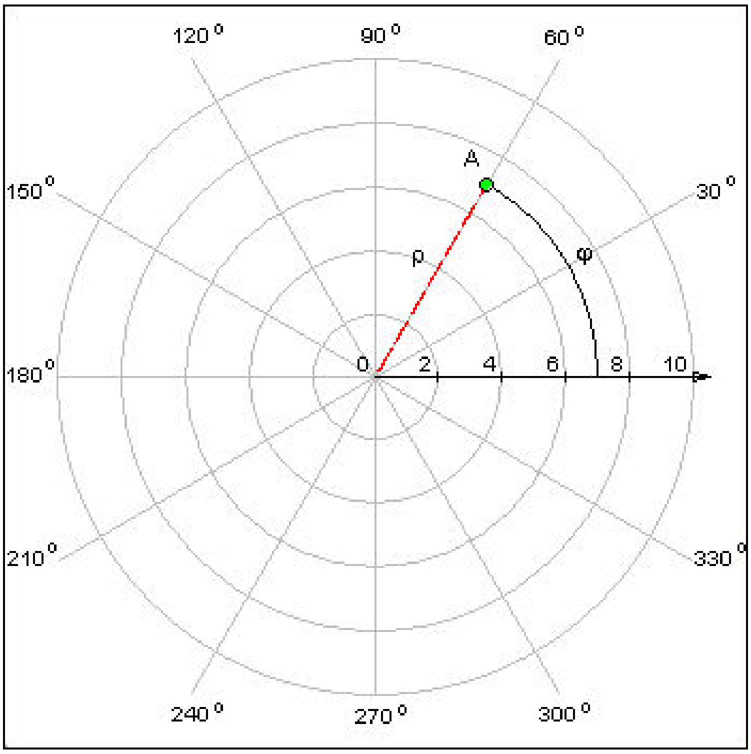


Рис. 3: Полярная система координат

Определение 6. Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным радиусом(ρ) и полярным углом(φ).

При этом, если в полярных координатах точка на плоскости имела координаты $(\rho;\varphi)$, то в декартовых координаты будут $(\rho\cdot\cos\varphi;\rho\cdot\sin\varphi)$.

Поворот вектора

Пусть дана точка с декартовыми координатами $(x;y)$. Хотим повернуть ее радиус вектор на угол φ и получить новую точку $(x_1;y_1)$.

Пусть полярные координаты данной точки (r,α). Тогда ответ в полярных координатах будет $(r,\alpha+\varphi)$.

То есть

$$x_1 = r\cos(\alpha+\varphi) = r\left(\cos(\alpha)\cos(\varphi) - \sin(\alpha)\sin(\varphi)\right) = x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)$$

.

Аналогично,

$$y_1 = r\sin(\alpha+\varphi) = r\left(\sin(\alpha)\cos(\varphi) + \cos(\alpha)\sin(\varphi)\right) = x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)$$

.

Скалярное произведение (Dot product)

Определение 7. Скалярное произведение для векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ определяется как $|a| \cdot |b| \cdot \cos(\alpha)$, где α — направленный угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Далее будем обозначать его как $\langle a, b\rangle$

Свойства:

1. Коммутативность: $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$. Оно верно, так как длины векторов не меняются, а угол между векторами меняет знак и $\cos(x) = \cos(-x)$
2. Линейность: $\langle \alpha \cdot \overrightarrow{a}_1 + \beta \cdot \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}\rangle = \alpha \cdot \langle \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{b}\rangle + \beta \cdot \langle \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}\rangle$. Доказывается подстановкой через формулу, которая будет ниже
3. $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\rangle = |a|^2$

Формула через координаты

Можно также записать $\langle a, b\rangle = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

Доказательство. Вспомним теорему косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$. Также мы знаем, что $|a|^2 = a_x^2 + a_y^2$ и $|b|^2 = b_x^2 + b_y^2$ и по теореме Пифагора $c^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2$. Давайте подставим в теорему косинусов. Тогда получим следующее: $(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2 \cdot \sqrt{(a_x^2 + a_y^2) \cdot (b_x^2 + b_y^2)} \cdot cos(\alpha)$. Раскроем скобки в левой части и получим

$$a_x^2 + b_x^2 - 2a_x \cdot b_x + a_y^2 + b_y^2 - 2a_y \cdot b_y = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2 \cdot \sqrt{(a_x^2 + a_y^2) \cdot (b_x^2 + b_y^2)} \cdot cos(\alpha)$$

Сократим и получим

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = \sqrt{(a_x + b_x)^2 \cdot (a_y + b_y)^2} \cdot \cos\alpha$$

Теперь понимаем, что $\sqrt{(a_x^2 + a_y^2) \cdot (b_x^2 + b_y^2)} = |a| \cdot |b|$ и выйдет в точности то, что мы хотели $\square$

Применение

Разберемся как использовать эти формулы. Рассмотрим формулу с косинусом. мы знаем, что если угол – тупой, то $\cos < 0$, если – острый, то $\cos > 0$, и если – прямой, то $\cos = 0$. Тогда мы зная координаты векторов можем легко узнать к какому типу относится угол между векторами.

Псевдоскалярное произведение (Cross product)

Определение 8. Псевдовекторное произведение для векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ определяется как $|a| \cdot |b| \cdot \sin(\alpha)$, где α — направленный угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Далее будем обозначать его как $[a, b]$

Свойства:

1. Антикоммутативность: $[a, b] = -[b, a]$ Оно верно, так как длины векторов не меняются, а угол между векторами меняет знак и $\sin(x) = -\sin(-x)$

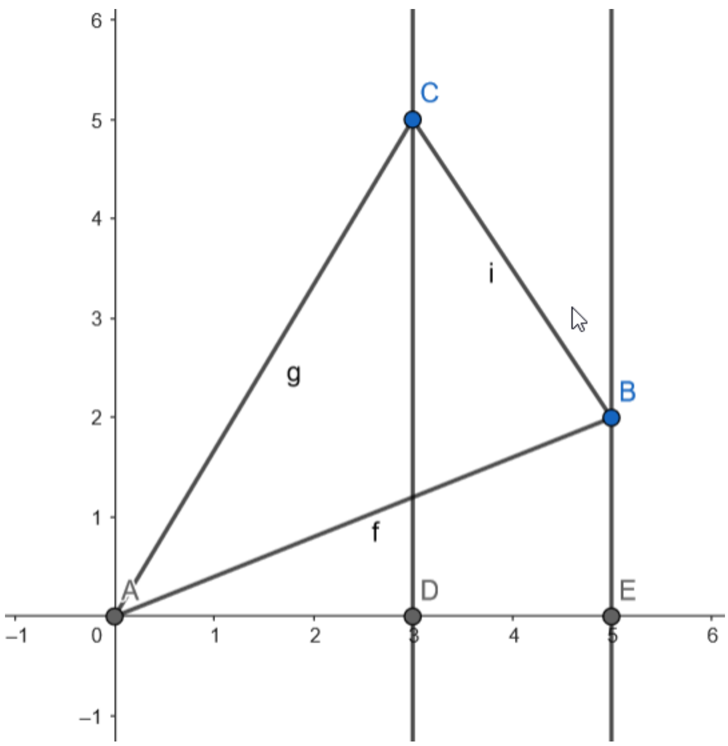
2. Линейность: $[\alpha \cdot \overrightarrow{a}_1 + \beta \cdot \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}] = \alpha \cdot [\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{b}] + \beta \cdot [\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}]$. Доказывается подстановкой через формулу, которая будет ниже

3. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] = 0$. Это верно, так как $\sin(0) = 0$

Формула через координаты

Можно также записать $[a, b] = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$

Доказательство. Из школьной программы мы знаем, что площадь параллелограмма, образованными сторонами a, b и углом α равна $a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$



Давайте посчитаем площадь треугольника ABC. Она равна $S_{ACD} + S_{CBED} - S_{ABE}$. Найдем эти площади по отдельности. $S_{ACD} = \dfrac{AD \cdot DC}{2}, S_{CBED} = \dfrac{CD + BE}{2} \cdot DE, S_{ABE} = \dfrac{BE \cdot AE}{2}$. Обозначим координаты B как (x_1, y_1), координаты C как (x_2, y_2). Тогда если сложим выражения и подставим координаты получим: $\dfrac{x_2 \cdot y_2}{2} + \dfrac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_1 - x_2) - \dfrac{y_1 \cdot x_1}{2}$. Если сократим подобные слагаемые, то получим $S_{ABC} = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot x_1}{2}$. Теперь понимаем, что треугольник это половина параллелограмма и получаем, то что хотели. $\square$

Применение

Разберемся как использовать эти формулы. Рассмотрим формулу с синусом. Вспомним, что у нас $\sin = 0$, когда угол равен нулю, то есть когда две точки на одной прямой, если $\sin < 0$, то мы знаем, что угол меньше 0, и если $\sin > 0$, то знаем, что угол больше 0. Следовательно через координаты двух векторов мы можем определять их взаимное расположение.

Простые применения скалярного и псевдоскалярного произведений

Задача 1. Проверить лежат ли три точки на одной прямой.

Решение. Рассмотрим два ненулевых вектора и поймем, когда они колинеарны. Они колинеарны тогда и только тогда, когда угол между ними 0 или π, иными словами синус угла между ними равен 0, а это верно тогда и только тогда, когда псевдовекторное произведение этих векторов нулевое (так как длины не нулевые).

Заметим, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

Задача 2. Проверить, что точка X принадлежит лучу. Луч задан его началом A и точкой на нем, отличной от начала, B.

Решение. Сначала проверим, что точка принадлежит прямой через точки A и B. Если X не лежит на прямой, то она не лежит и на луче. Иначе, нужно проверить, что $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправленные векторы. Это можно сделать (при условии, что точка лежит на прямой AB) проверив, что $\langle\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}\rangle \geq 0$ (так как косинус будет 1 при сонаправленности, а длины положительны. Если же они противонаправлены, то косинус -1 и произведения будет отрицательным).

Задача 3. Проверить, что точка X принадлежит отрезку AB.

Решение. Нужно проверить, что точка X принадлежит лучу с началом в точке A и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$ и на луче с началом в точке B и направляющим вектором $\overrightarrow{BA}$.

Задача 4. Расстояние от точки X до прямой, проходящей через точки A и B.

Решение. Известно, что $\left[\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}\right] = 2 \cdot S_{\triangle ABX}$. Высота треугольника ABX и есть расстояние от точки до нужной прямой. Тогда $ans = \dfrac{S_{\triangle ABX}}{|AB|} = \dfrac{\left[\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}\right]}{|AB|}$. Здесь используется то, что удвоенная площадь треугольника равна высоте (проведенной к основанию) умноженной на основание.

Задача 5. Найти расстояние от точки X до луча с началом в точке A и точкой на нем B.

Решение. Если перпендикуляр из точки на прямую AB падает на луч, то находить расстояние мы уже умеем. Осталось проверить, что перпендикуляр падает на луч, то есть $\angle XAB \leq \dfrac{\pi}{2}$. Из свойств косинуса, это верно тогда и только тогда, когда $\langle\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}\rangle \geq 0$.

Угол между векторами

Пусть нам зачем-то захотелось находить угол между векторами(лучше конечно избегать таких желаний). Тогда для этого в C++ есть функция $atan2(y, x)$, которая по координам точки возвращает арктангенс полярного угла. Для поиска угла между векторами используйте $atan2([a, b], \langle a, b\rangle)$. Для более подробной информацци обращайтесь к $cppreference$.

Проверка пересечения двух отрезков

Пусть нам даны два отрезка и мы хотим проверить пересекаются ли они или нет. Давайте введем функцию $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$. В скором времени мы ее применим. Вернемся к основной задаче. Выделим два основных случая: отрезки лежат на одной прямой или на разных.

1. Если отрезки лежат на одной прямой, то достаточно проверить, что их проекции на этой прямой пересекаются. То есть для этого одна из точек должна лежать между двумя другими. Это легко проверить, сравнив скалярное произведение векторов из каждой точки и концов нужных отрезков на $\leqslant 0$.

2. Если же отрезки лежат на разных прямых, то надо проверить для обоих отрезков, что концы другого отрезка лежат по разную сторону от него. Чтобы проверить с какой стороны от отрезка находится точка можем воспользоваться векторным произведением и посмотреть, что они разных знаков для концов отрезка, то есть посмотреть, что произведение значений функции $\operatorname{sgn}(x)$ от них дает результат $\leqslant 0$.

Код

```
bool check_Seg_Seg(Point a, Point b, Point c, Point d) {
    if (check_Point_Seg(a, b, c) || check_Point_Seg(a, b, d)) {
        return 1;
    }
    if (check_Point_Seg(c, d, a) || check_Point_Seg(c, d, b)) {
        return 1;
    }
    if ((a - b) % (c - d) != 0) {
        if (sign((c - a) % (b - a)) == sign((d - a) % (b - a))) {
            return 0;
        }
        if (sign((a - c) % (d - c)) == sign((b - c) % (d - c))) {
            return 0;
        }
        return 1;
    }
    return 0;
}
```

Уравнение прямой $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

Пусть мы хотим по двум точкам $a(x_1, y_1), b(x_2, y_2)$ найти прямую, которая их содержит. Вероятно вы бы предложили использовать уравнение прямой $y = k \cdot x + b$, но у него есть значительный недостаток, что оно не позволяет хранить вертикальные прямые, поэтому придется их отдельно рассматривать. Вместо такого уравнения будем использовать $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Разберемся как получить такое уравнение по двум точкам. Сделаем $a = y_1 - y_2, b = x_2 - x_1, c = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$. Проверим, что оно подходит: $a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c = x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$. Можем аналогично подставить (x_2, y_2), но автору лень. Заметим, что $(-b, a) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Получается, что $(-b, a)$ имеет такой же угол наклона, что и прямая.

Теперь давайте решим обратную задачу: найдем по уравнению прямой две точки на прямой. Вначале поймём, что $\left(-\frac{a \cdot c}{a^2 + b^2}, -\frac{b \cdot c}{a^2 + b^2}\right)$ лежит на прямой. Можете проверить это сами подстановкой. Тогда, чтобы получить любую другую точку можем взять эту точку и добавить $(-b, a)$ умноженный на какую-то константу.

Пересечение двух прямых

Пусть нам даны две прямые $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ и $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ и мы хотим найти точку их пересечения. Запишем систему уравнения

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0, \\ \mathrm{a}_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

её решением будет

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}, \\ y = \dfrac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{cases}$$

Поймем как расшифровать это решение. Решения не будет когда $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$, так как знаметаль обращается в ноль или векторное произведение становится нулю, то есть прямые параллельны. Теперь если числитель равен нулю, то это значит, что решений бесконечно много или с точки зрения геометрии прямые совпадают. В ином случае решение существует и единственное, так как прямые пересекаются в одной точке.

Расстояние от точки до прямой

Определение 9. Назовем нормалью вектор (a, b) для прямой L, если этот вектор перпендекулярен прямой L

Поймем, что для прямой $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ вектор (a, b) будет вектором нормали, потому что мы в прошлом пункте выяснили, что $(-b, a)$ параллелен прямой, а скалярное произведение (a, b) и $(-b, a) = 0$. Таким образом для прямой мы знаем вектор перпендекулярный ей.

Пусть теперь нам дана прямая $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ и расстояние d. Давайте найдём прямую, которая параллельна данной и находится на расстоянии d от исходной. В начале давайте поймем, что раз прямые параллельны, то коэфиценты a и b не меняются, осталось только найти c. Обозначим новое c как c'. Пусть есть какая-то точка (x, y), которая лежит на исходной прямой, тогда поймем, что точка сдвинется на вектор $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d)$, так как нам надо прямую сдвинуть по вектору нормали и при этом мы хотим сдвинуть ровно на d, поэтому делим на его длину и умножаем на нужную. Отлично, давайте теперь запишем уравнение новой прямой

$$a \cdot (x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d) + b \cdot (y + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d) + c' = 0 = a \cdot x + b \cdot y + c$$

Раскрываем скобки и сокращаем $a \cdot x + b \cdot y$. Получаем

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d + c' = c$$

Осталось выразить c' и получим

$$c' = c - \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot d = c - \sqrt{a^2+b^2} \cdot d$$

В будущем пригодится вывод, что $d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Давайте научимся находить ориентированное расстояние от точки до прямой. Мы знаем, что прямая проходящая параллельно исходной прямой $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ через (x, y) имеет те же самые коэффценты a и b, новое c обозначим как c', тогда знаем, что $a \cdot x + b \cdot y + c' = 0$. Как видим, c' можем легко найти это будет $-a \cdot x - b \cdot y$. Теперь воспользуемся формулой, которую вывели до этого $d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-a \cdot x - b \cdot y - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a \cdot x + b \cdot y + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если же нужно ориентированное расстояние, то уберем модуль, тогда с одной стороны оно будет > 0 и с другой < 0.

Теперь, чтобы найти основание перпендекуляра на прямую из точки, давайте найдем ориентированное расстояние до прямой. Сделаем вектор нормали такой длины и добавим его к точке, тогда мы будет двигаться строго перпендекулярно и попадем на прямую.

Если же мы хотим найти точку симметричную относительно данной прямой, то давайте вначале восставновим перпендекуляр и добавим этот же самый вектор, тогда мы будем идти строго по перпендекуляру и расстояние будет тоже самое. Но что мы в итоге сделали? Мы взяли вектор и дважды добавили его к точке. Тогда вместо этого можем удвоить вектор и добавить его к точке.

Окружности

Окружность радиуса r с центром в точке x_0, y_0 задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

.

Дана прямая a. Нужно найти ее точки пересечния C_1 и C_2 с окружностью, центр которой в точке O, а ее радиус равен R.

Пересечние окружности и прямой

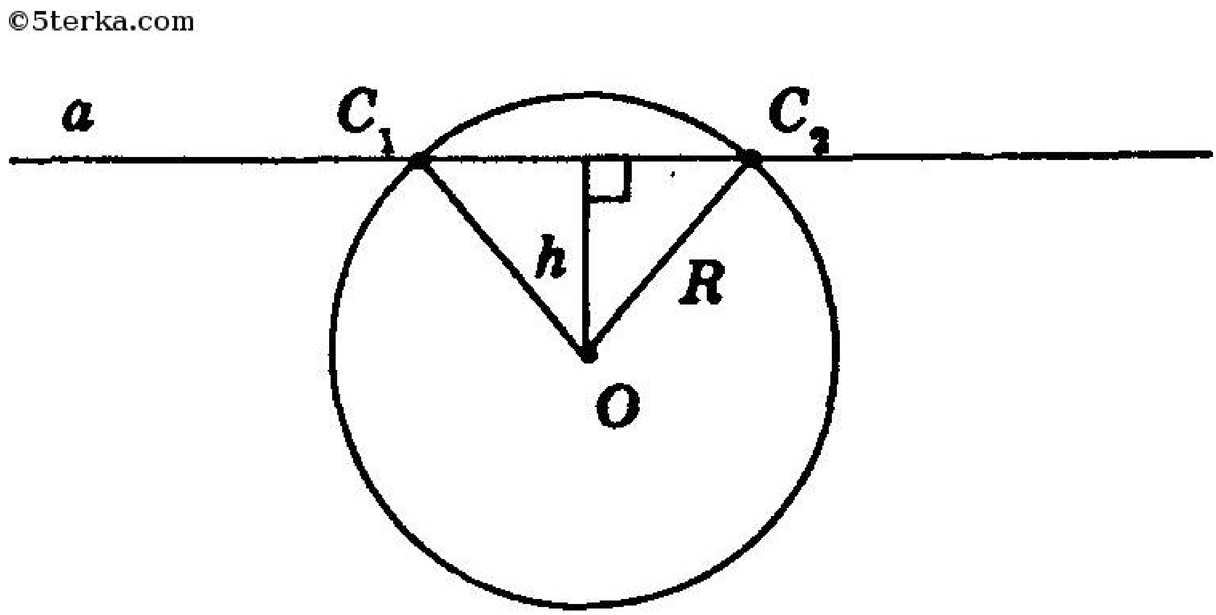


Рис. 4: Пересечение окружности и прямой

Пусть h — расстояние от O до данной прямой. Точка A — основание перпендикуляра из точки O на прямую. Тогда если $h > R$, то прямая вообще не пересекает окружность. Иначе по теореме Пифагора $AC_1 = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Тогда чтобы решить задачу нужно найти точку A, а затем отложить от нее в обоих направлениях по прямой $\sqrt{R^2 - h^2}$.

Пересечение окружностей

Пусть даны окружность $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ и $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$. Нужно найти точки их пересечения.

Вычтем из втрого уравнения первое. Получим:

$$-2x \cdot x_2 + x_2^2 - 2y \cdot y_2 + y_2^2 + 2x \cdot x_1 - x_1^2 + 2y \cdot y_1 - y_1^2 = r_2^2 - r_1^2$$

. Получилась прямая вида

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - r_2^2 + r_1^2 = 0$$

.

Значит если изначально у нас была система из двух уравнений окружности, то теперь у нас система из окружности и прямой, а такую задачу мы уже решили выше.

Касательная к окружности

Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. Хочется найти касательные к этой окружности, проходящие через точку A.

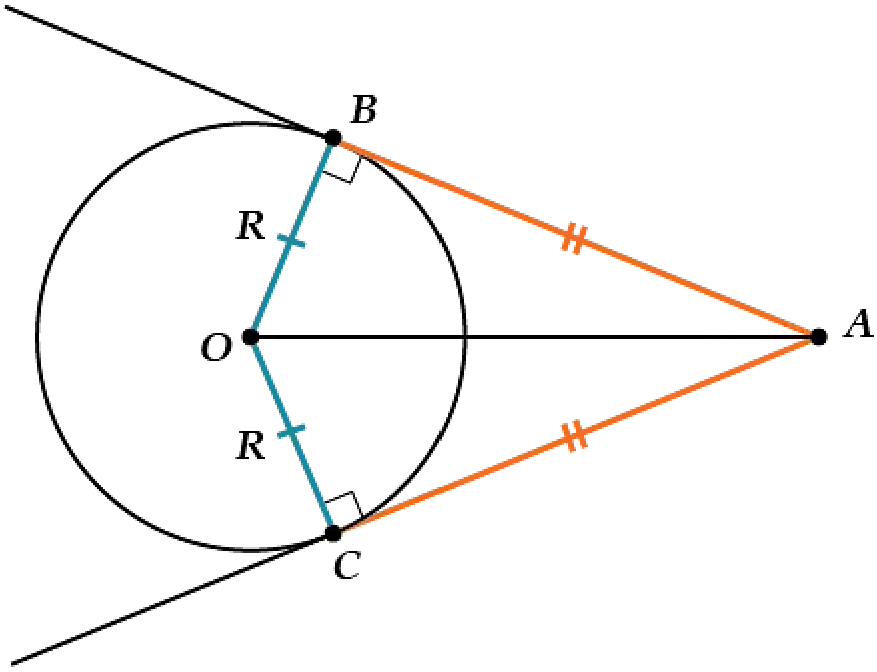


Рис. 5: Пересечение окружности и прямой

Пусть $OA = d$. Тогда по теореме Пифагора $BA = CA = \sqrt{d^2 - R^2}$. Осталось найти направления, в которых нужно проводить прямые. Это можно сделать повернув отрезок OA с центром поворота в точке A на угол, синус которого равен $\dfrac{R}{d}$.

Шаблон

```
struct Point {
    int x, y;
    Point() {}
    Point(int x, int y): x(x), y(y) {}
    void init() {
        cin >> x >> y;
    }
    void print() {
        cout << fixed << x << ' ' << y << endl;
    }
    long double len() const {
        return sqrt(x * x + y * y);
    }
    Point operator + (Point a) const {
        return Point(x + a.x, y + a.y);
    }
    Point operator - (Point a) const {
        return Point(x - a.x, y - a.y);
    }
    Point norma() const {
        return Point(-y, x);
    }
    int operator * (Point a) const {
        return x * a.x + y * a.y;
    }
    int operator % (Point a) const {
        return x * a.y - y * a.x;
    }
    Point mul(int k) const {
        return Point(x * k, y * k);
    }

    /*
     * For points with floating point coordinates:
     * (Don't forget to change types in +, -, *, % and mul)

    const long double eps = 1e-9;

    Point set_len(double new_len) const {
        return mul(new_len / len());
    }
    Point normalize() const {
        return set_len(1);
    }
    Point turn(long double alpha) const {
        return mul(cos(alpha)) + norma().mul(sin(alpha));
    }
    bool operator == (Point a) const {
        return (fabs(x - a.x) < eps && fabs(y - a.y) < eps);
    }
    */
};

istream& operator >> (istream& is, Point &p) {
    is >> p.x >> p.y;
    return is;
}

ostream& operator << (ostream& os, const Point &p) {
    os << p.x << ' ' << p.y;
    return os;
}
```