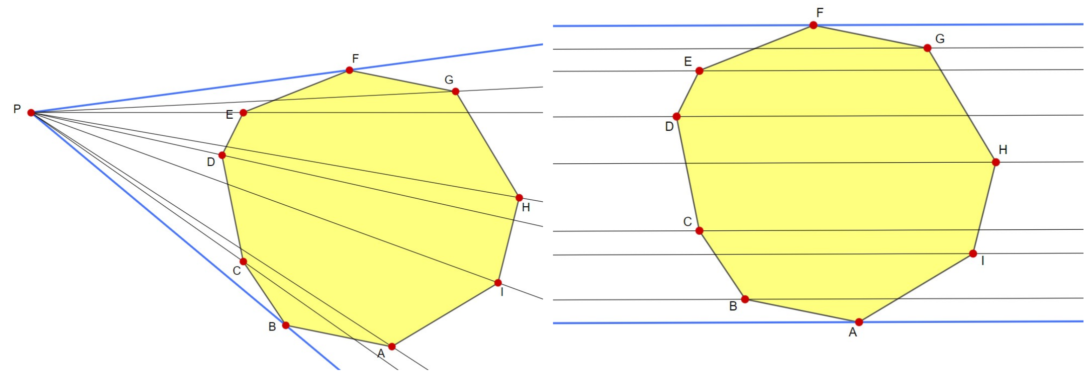
Вступление и обозначения

Ниже все индексы берутся по модулю n.

Обе задачи — построения касательных из точки, и касательных, заданных направлением — схожи. Можно даже сказать, что вторая является разновидностью первой, где точка удалена на бесконечность. Тем не менее, в аспекте программирования, следует различать эти задачи, так как адекватно работать с бесконечностями мы не умеем.



Рассмотрим ответы на задачи, а именно — сами касательные. Они являются неким экстремальным значением прямых, проходящих через вершину многоугольника, и имеющих общее свойство (прохождение через точку P / параллельность заданной прямой). Определим это ниже:

Пусть i-я вершина многоугольника — H_i, а прямая, проходящая через неё — l_i. Возьмём нулевую вершину в качестве опорной и определим $\rho(i)$, как (направленный угол $\angle H_0PH_i$ в случае касательных из точки / направленное расстояние между прямыми l_0 и l_i в случае параллельных касательных). Направленное расстояние считается положительным, если l_i по одну сторону от l_0, и отрицательным — если по другую (положительная полуплоскость выбирается произвольно один раз до начала алгоритма).

Заметим, что $\rho(i)$ ведёт себя понятным образом: для некоторого low: $\rho(low)$ минимально, для некоторого $high$: $\rho(high)$ максимально, для индексов от low до $high$ ρ возрастает, для прочих — от $high$ до low — убывает. Назовём это поведение циклически битонным, по аналогии с монотонным. Найти касательные — всё равно что найти точки low и $high$, через которые они и проходят. Необязательно значения ρ различны, но эти случаи почти не влияют на доказательство и алгоритм, и их разбор предоставляется читателю в качестве упражнения. Таким образом, мы предполагаем, что $\rho(i) \neq \rho(j)$ если $i \neq j \pmod{n}$.

Стоит упоминания, что ρ можно вычислить только в `double`'ах, как угол из $(-\pi; \pi)$, или как расстояние от точки до прямой. Но вычисление ρ нам нигде не пригодится. Вместо этого достаточно уметь сравнивать $\rho(i) > / < \rho(j)$. В обоих случаях это делается проверкой знака косого (векторного) произведения (в случае касательных из точки это $\overrightarrow{PH_i} \times \overrightarrow{PH_j}$, в случае касательных, заданных направлением, это $\overrightarrow{H_iH_j} \times \overrightarrow{v}$, где $\overrightarrow{v}$ - вектор, параллельный прямой).

Алгоритм

Пусть $lg = \lceil \log_2(n) \rceil$. Заведём некий индекс i изначально равный чему угодно (можно принять $i = 0$), сделаем lg итераций. Рассмотрим на k-й итерации (пронумеровав их $k = lg - 1, ..., 1, 0$) три индекса: $i - 2^k, i, i + 2^k$. Выберем среди них тот, у кого ρ максимально / минимально (в случае равенства можно выбрать любой).

Утверждение: после всех итераций $\rho(i)$ максимально / минимально соответственно, а значит, через H_i проходит искомая касательная.

Доказательство корректности

Предположим, что мы ищем индекс с минимальным значением ρ. Для максимального значения всё аналогично.

Для доказательства корректности будем красить вершины многоугольника и соответствующие им индексы в цвета. Если j-я вершина покрашена в цвет c, то это значит, что начав из этой вершины (приняв $i = j$) для $k = c - 1$, или же большего значения (и уменьшая в процессе работы алгоритма k до 0), алгоритм всё равно остановится в искомой вершине (с минимальным значением $\rho(i)$). $c = 0$ означает, что вершина уже сама является минимальной.

Наша цель — доказать, что можно таким образом покрасить вершины в цвета $0, 1, 2, \ldots, lg$. Тогда, по определению цвета покраски вершины, алгоритм, начав в любой вершине при $k = lg - 1$, и уменьшая в процессе работы k до 0, остановится в искомой вершине с минимальным ρ.

Будем красить вершины итеративно, сначала в цвет 0, потом в цвет 1, и так далее. Сначала покрасим саму минимальную вершину в цвет 0, далее будем действовать по индукции.

Рассмотрим отрезок уже покрашенных вершин в цвета $c, c-1, ..., 1, 0$. Из индукции очевидно, что это действительно отрезок, причём его длина равна 2^c. Выберем непокрашенные вершины, соседние с этим отрезком, на расстоянии не более 2^c от него. Формальнее, выберем такие индексы j, что хотя бы одна из вершин $j-2^c, j+2^c$ уже покрашена, а j ещё не покрашена. Если выбраны все непокрашенные вершины, то покрасим их всех в цвет $c + 1$, иначе в цвет $c + 1$ покрасим среди этих $2 \cdot 2^c$ вершин ровно половину с минимальным значением $\rho(j)$.

Заметим, что после каждого шага для некоего α покрашены вершины i, для которых $\rho(i) \geq \alpha$, и не покрашены остальные. Это следует из битонности ρ и того, что покраска началась с минимальной вершины. Отсюда следует, что в процессе работы алгоритма цвет вершины не может увеличиться.

Теперь убедимся, что покраска сделана корректно: убедимся, что алгоритм, начав из вершины i цвета c, закончит в минимальной вершине, изменяя $k = c - 1, \ldots, 1, 0$. Пусть алгоритм стартовал с вершины i цвета c. Тогда пока $k \geq c$, i по-прежнему показывает на вершину цвета не более c. Далее, на шаге $k = c - 1$, алгоритм (если ещё не) изменит i на указатель, указывающий на вершину меньшего цвета. В самом деле, по построению вершин c-го цвета, на расстоянии 2^{c-1} от них есть вершина меньшего цвета, а у них всех $\rho(i)$ меньше. Таким образом, доказательство и алгоритм корректны.

Иллюстрация доказательства

Оранжевым помечены ещё непокрашенные вершины, красным — уже покрашенные. Зелёным помечены вершины, которые рассматриваются в очередном шаге доказательства.

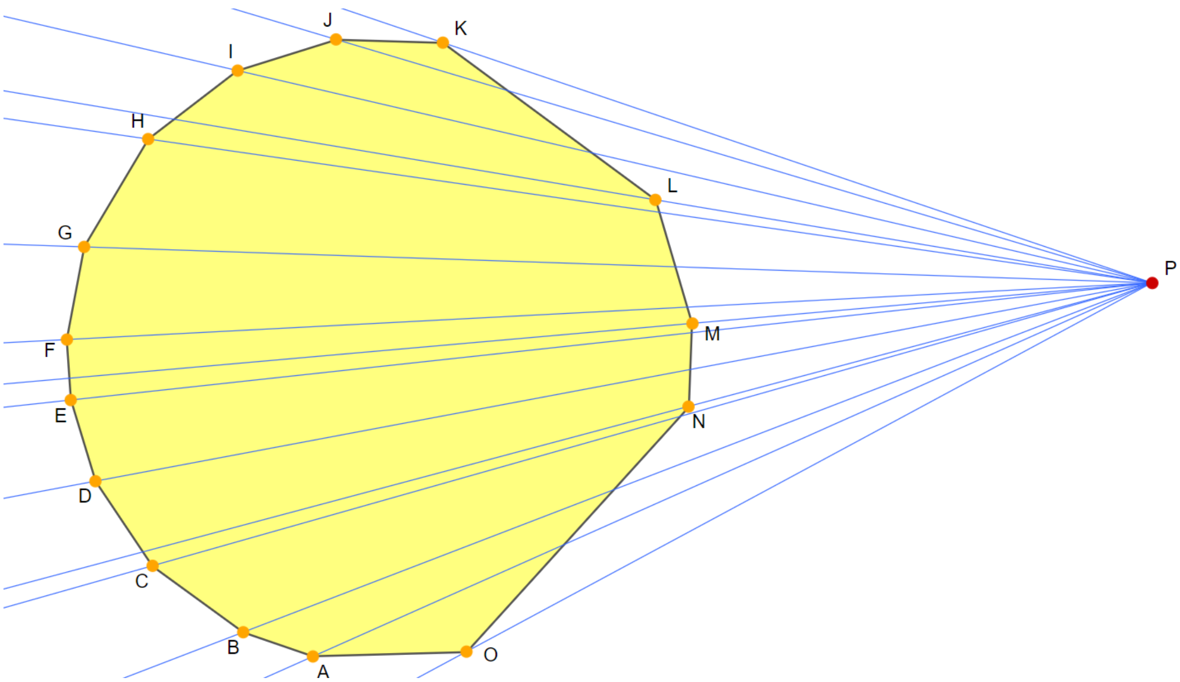


Рис. 1: В начале никакие вершины не покрашены.

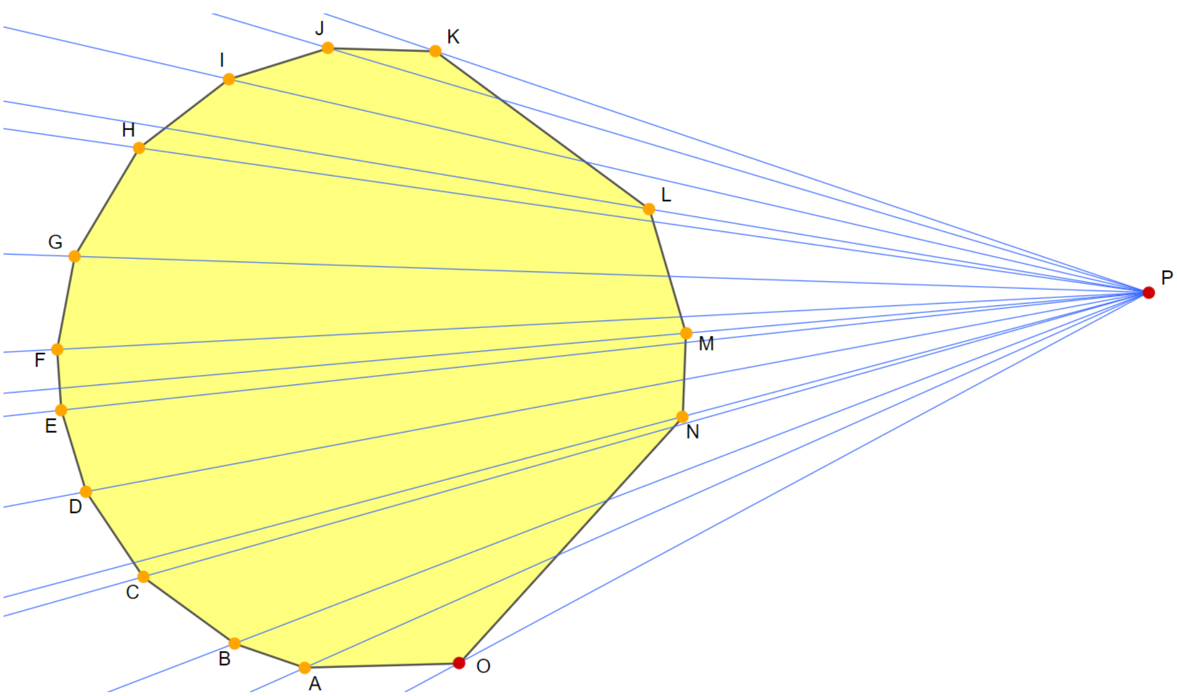


Рис. 2: Красим вершину с минимальным ρ в цвет 0. Это вершина O.

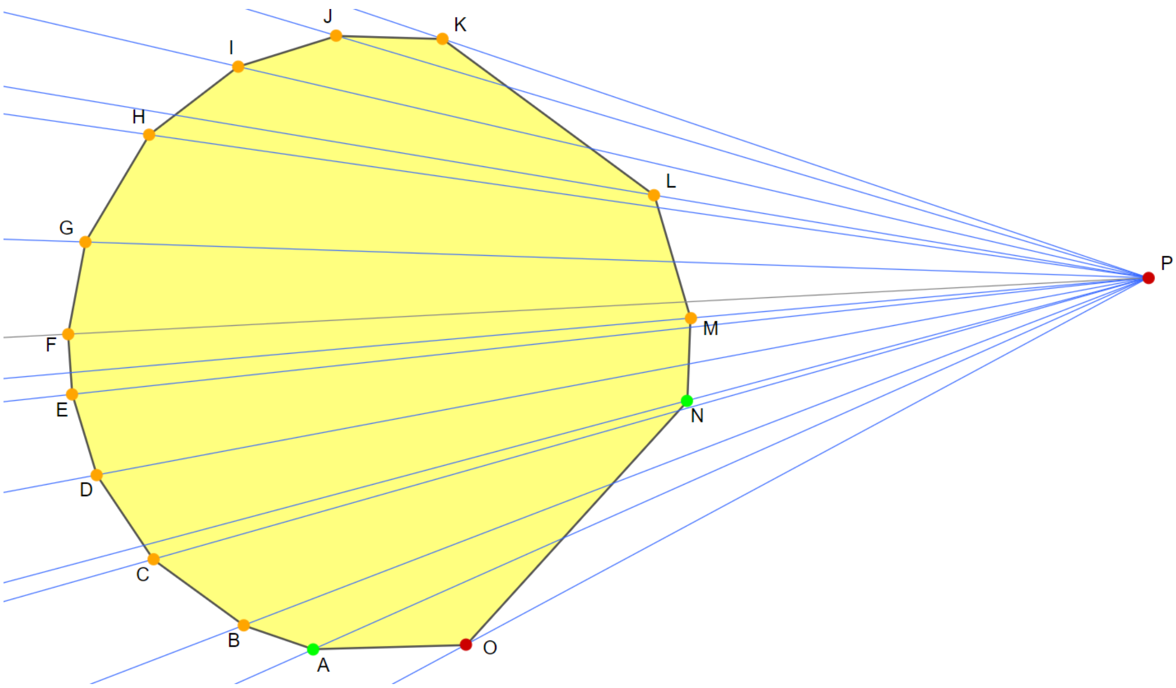


Рис. 3: Рассматриваем вершины на расстоянии 2^0 от уже покрашенных. Это вершины A и N.

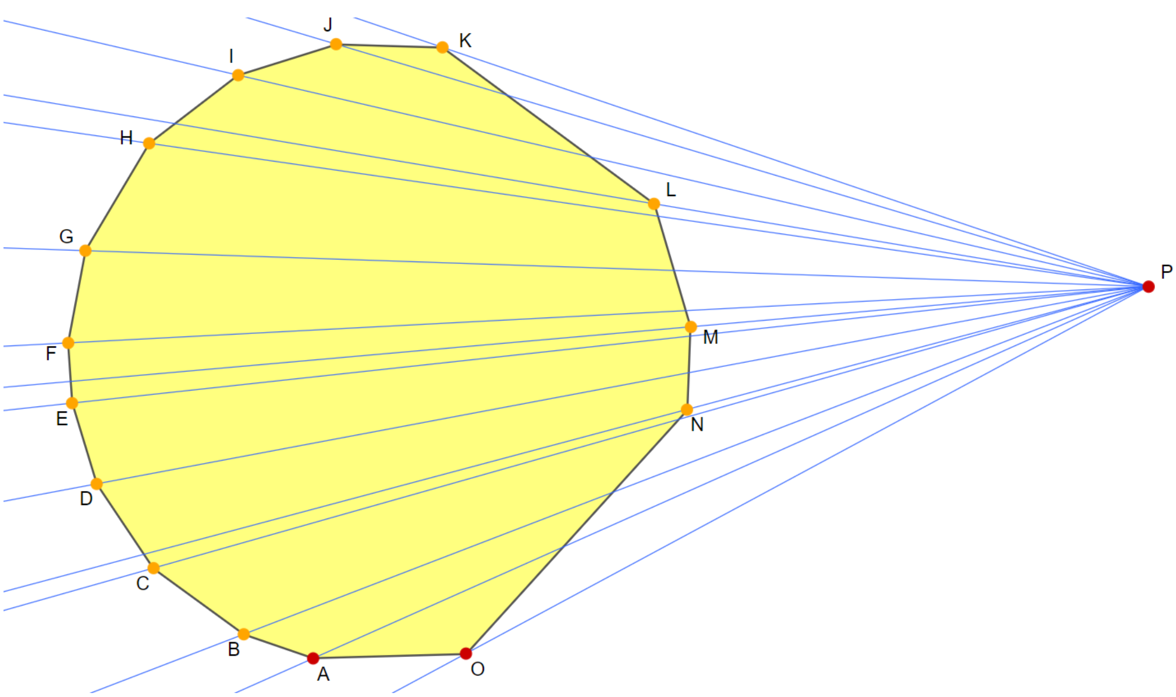


Рис. 4: Красим среди них 2^0 вершин с минимальным ρ (ближайшие лучи к касательной). Луч PA ближе к лучу PO, чем PN, поэтому красим вершину A в цвет 1.

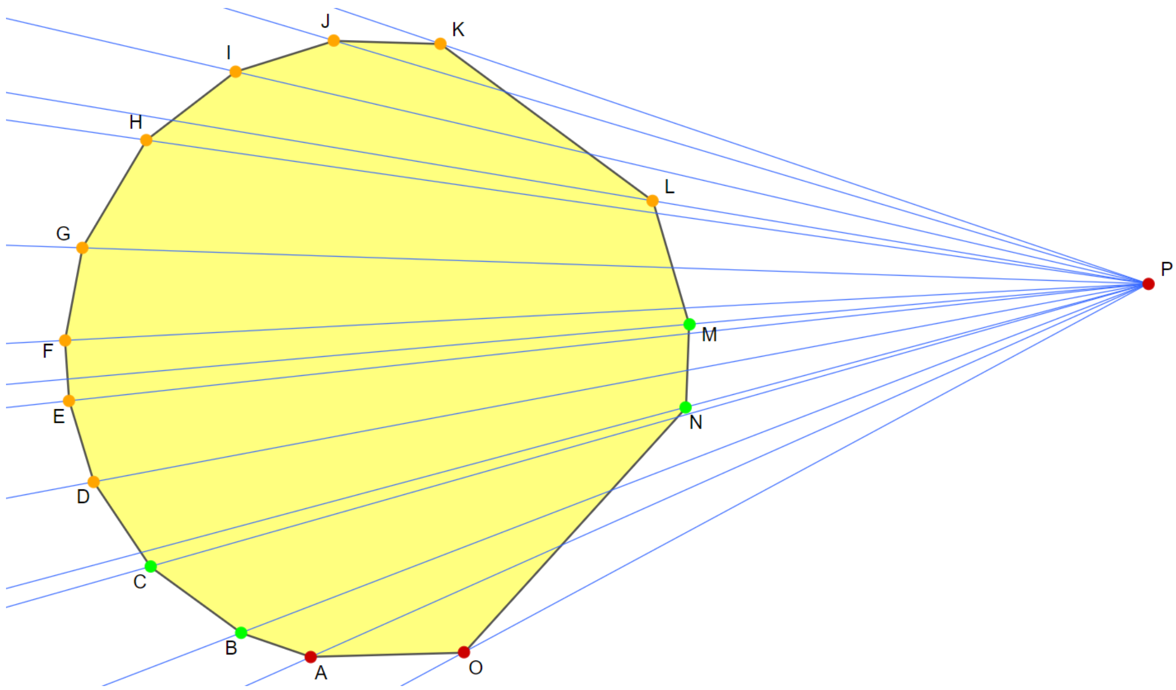


Рис. 5: Рассматриваем вершины на расстоянии 2^1 от уже покрашенных. Это вершины B, C, M, N.

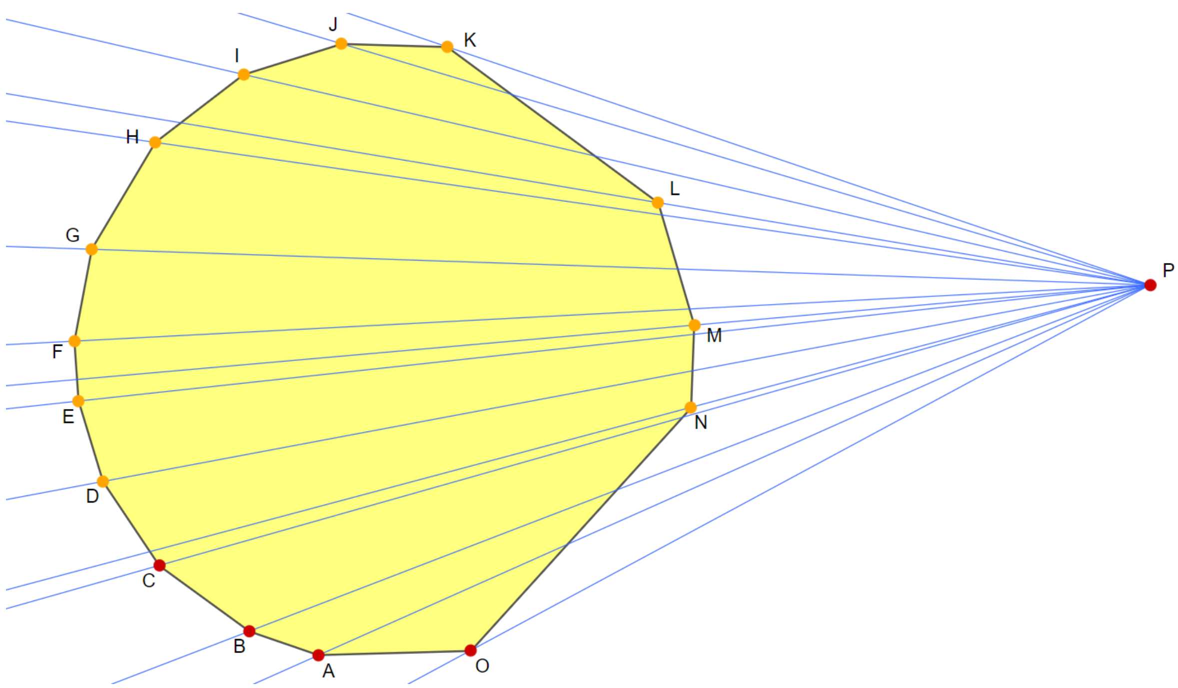


Рис. 6: Красим среди них 2^1 вершин с минимальным ρ (ближайшие лучи к касательной). А именно, красим вершины B и C в цвет 2.

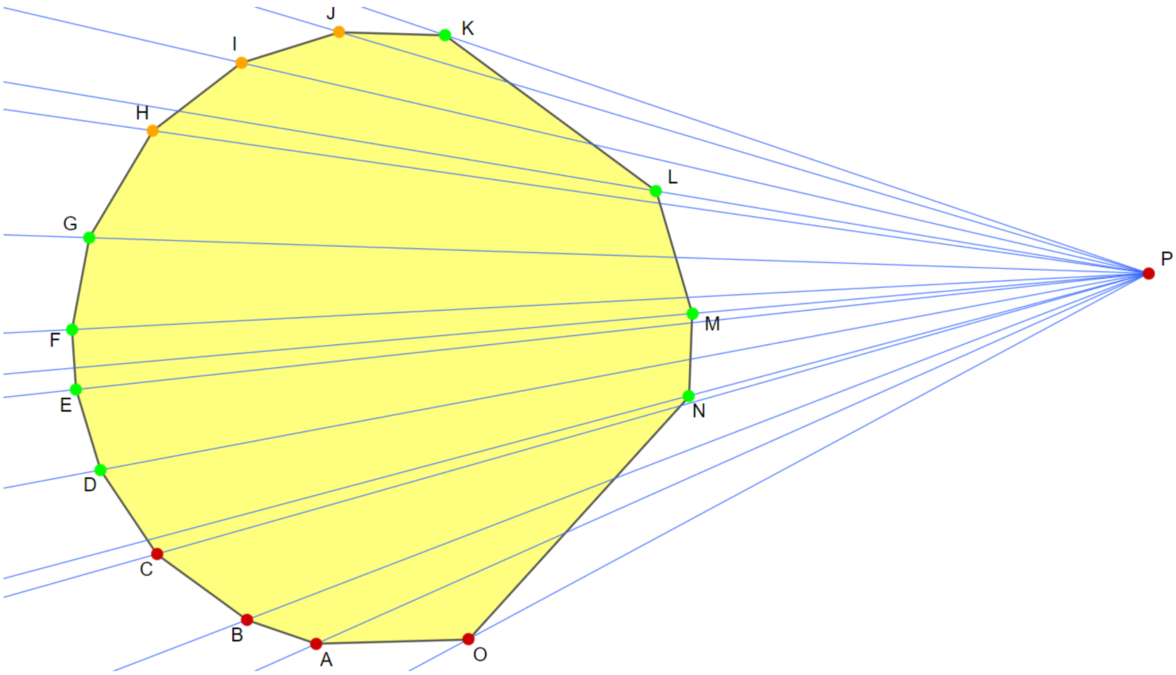


Рис. 7: Рассматриваем вершины на расстоянии 2^2 от уже покрашенных. Это вершины D, E, F, G, K, L, M, N.

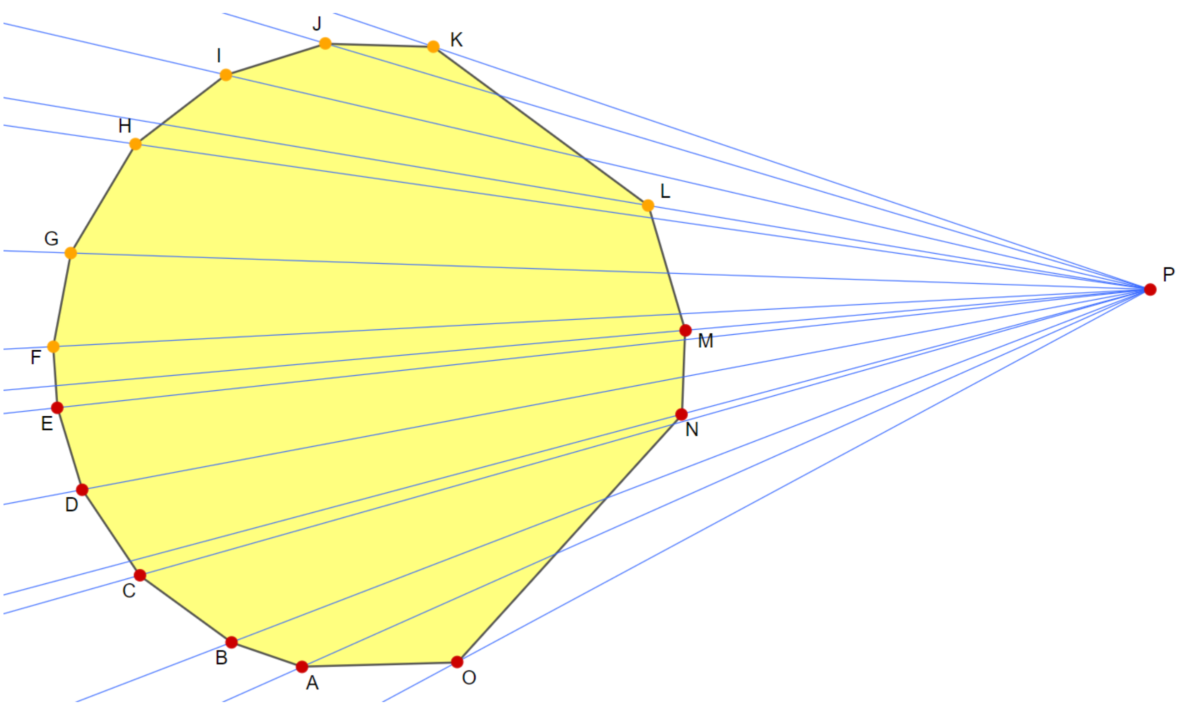


Рис. 8: Красим среди них 2^2 вершин с минимальным ρ (ближайшие лучи к касательной). А именно, красим вершины D, E, M, N в цвет 3.

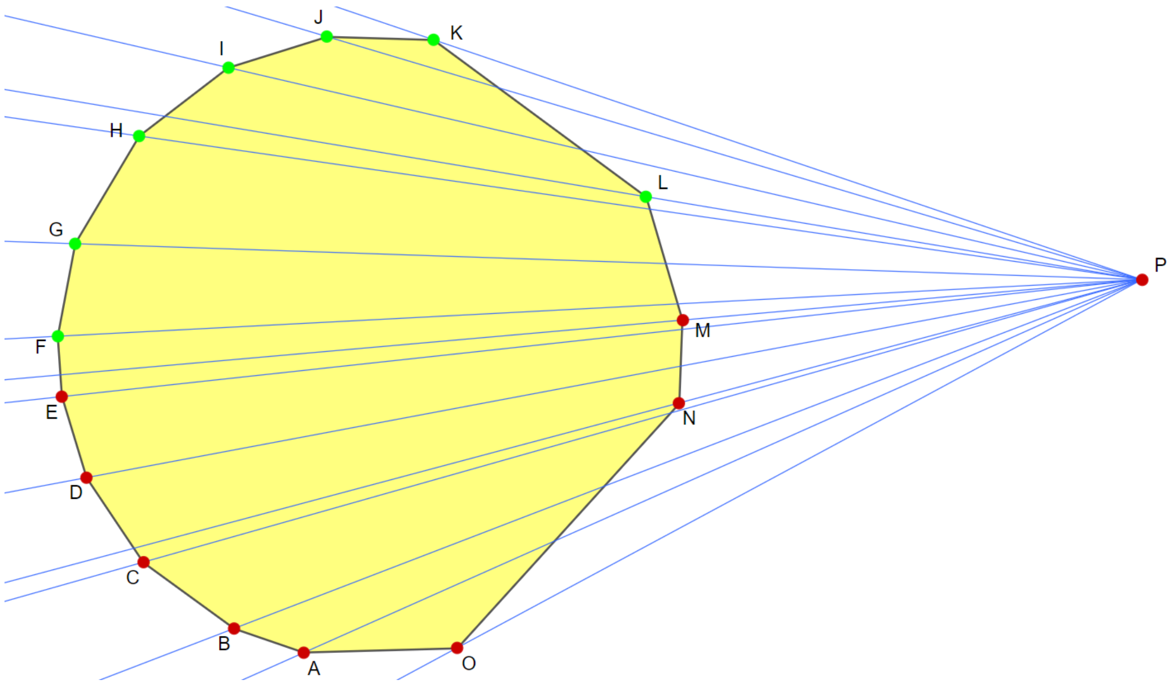


Рис. 9: Рассматриваем вершины на расстоянии 2^3 от уже покрашенных. Это все оставшиеся непокрашенные вершины.

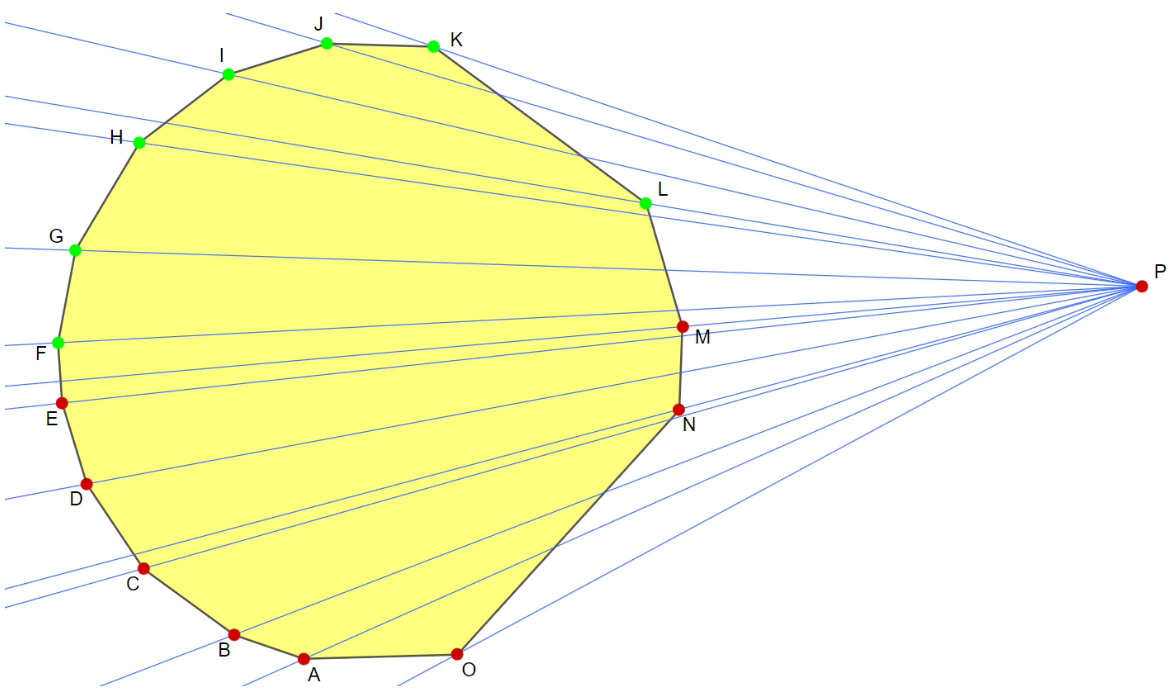


Рис. 10: Красим все эти вершины в цвет 4. Доказательство завершено, вершины 15-угольника покрашены в цвета $0, 1, 2, 3, 4$, и, действительно, $lg = 4$.