Задача A. Подсчет деревьев

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Заданы числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Посчитайте количество различных бинарных деревьев, в которых вершины могут иметь вес c_i. Вершины равного веса считаются одинаковыми.

Формат входных данных

В первой строке содержатся два целых числа k и m ($1 \leqslant k, m \leqslant 2\,000$) — количество весов вершин и максимальный вес дерева. В следующей строке содержатся числа c_i ($1 \leqslant c_i \leqslant m$). Все c_i различны.

Формат выходных данных

Выведите m чисел — количество деревьев веса $1, 2, \ldots, m$ по модулю $10^9 + 7$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2 5 1 3	1 2 6 18 57
1 10 2	0 1 0 2 0 5 0 14 0 42

Задача B. Конструируемые комбинаторные классы

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

В этой задаче мы используем следующие способы конструирования комбинаторных объектов.

Базовое множество B состоит из одного объекта u с весом 1. Каждый сконструированный объект x имеет некоторый вес $w(x)$. Если объект сконструирован из одного или нескольких других объектов, его вес равен сумме весов этих объектов.

Пусть X задаёт некоторое множество комбинаторных объектов. Рассмотрим следующие способы создать новые множества объектов.

Множество $L(X)$ состоит из всех возможных списков конечной длины, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит множеству X. Например, $L(B)$ состоит из списков $[]$, $[u]$, $[u, u]$, $[u, u, u]$, и так далее. Аналогично, $L(L(B))$ состоит из $[]$, $[[u]]$, $[[u], [u]]$, $[[u, u], [u]]$, $[[u], [u, u]]$, и так далее. Обратите внимание, последние два списка различны, поскольку для списка важен порядок элементов в нем. Также обратите внимание, что $[[]]$ не является корректным списком в $L(L(B))$, поскольку только объекты положительного веса разрешаются в качестве элементов списков, а $[]$ имеет вес 0.

Множество $S(X)$ содержит все возможные мультимножества конечного размера, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит X. Например, $S(B)$ состоит из мультимножеств $\{\}$, $\{u\}$, $\{u, u\}$, $\{u, u, u\}$, и так далее. Еще один пример: $S(L(B))$ содержит, например, мультимножества $\{[u]\}$, $\{[u], [u]\}$. Обратите внимание, что мультимножество может содержать несколько равных объектов. Заметьте, что в отличие от списков для мультимножеств не важен порядок элементов, поэтому мультимножество $\{[u], [u, u]\}$ совпадает с мультимножеством $\{[u, u], [u]\}$.

Вес списка или мультимножества равен сумме весов его элементов, например, вес $([u], [u, u], [u, u, u])$ равен 6.

Наконец, последний рассматриваемый способ создания нового типа комбинаторных объектов — пара. Если X и Y — множества комбинаторных объектов, то $P(X, Y)$ представляет собой множество упорядоченных пар объектов, где первый компонент взят из X, а второй — из Y. Например, $P(S(B), L(B))$ содержит в качестве элементов $\langle\{u, u\}, [u, u, u]\rangle$ и $\langle\{\}, [u]\rangle$. Обратите внимание, что в отличие от списков, мультимножеств и циклов, пары могут содержать компоненты нулевого веса.

По заданному описанию класса комбинаторных объектов посчитайте количество элементов веса 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Формат входных данных

В единственной строке входного файла содержится корректное описание комбинаторного объекта. Длина описания не превосходит 200.

Формат выходных данных

Выведите семь целых чисел — количество объектов в описанном комбинаторном классе с весом от 0 до 6.

Примеры

стандартный ввод
P(S(B),L(B))
стандартный вывод
1 2 3 4 5 6 7

стандартный ввод
S(L(B))
стандартный вывод
1 1 2 3 5 7 11

стандартный ввод
`L(P(L(L(L(P(P(P(B,L(B)),L(B)),P(B,L(B)))))),P(B,L(B))))`
стандартный вывод
`1 1 2 5 14 42 132`

Задача C. Каталанские комбинаторные объекты

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

Андрей очень любит числа Каталана. А еще Андрей очень любит шутить.

Андрей — автор многих задач и придумал немало контестов для разных сборов. Для многих контестов он делал задачи, в которых на ввод подаётся одно число, а ответ для вводов 0, 1, 2, 3, 4, и 5 равны, соответственно, 1, 1, 2, 5, 14 и 42. А вот ответы для других входных данных отличаются от соответствующих чисел Каталана.

Андрей сделал уже так много контестов, что ему тяжело придумывать задачи с таким свойством. Он решил автоматизировать процесс придумывания таких задач. Хороший пример возможных подобных задач — подсчет комбинаторных объектов определенной структуры. Андрей придумал, каким он хочет видеть k — ответ на задачу для ввода 6, и хочет придумать такой тип комбинаторных объектов, чтобы существовало 1, 1, 2, 5, 14, 42, k объектов этого типа для веса 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответственно.

Андрей использует следующие способы конструирования комбинаторных объектов.

Базовое множество B состоит из одного объекта u с весом 1. Каждый сконструированный объект x имеет некоторый вес $w(x)$. Если объект сконструирован из одного или нескольких других объектов, его вес равен сумме весов этих объектов.

Пусть X задаёт некоторое множество комбинаторных объектов. Рассмотрим следующие способы создать новые множества объектов.

Множество $L(X)$ состоит из всех возможных списков конечной длины, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит множеству X. Например, $L(B)$ состоит из списков $[]$, $[u]$, $[u, u]$, $[u, u, u]$, и так далее. Аналогично, $L(L(B))$ состоит из $[]$, $[[u]]$, $[[u], [u]]$, $[[u, u], [u]]$, $[[u], [u, u]]$, и так далее. Обратите внимание, последние два списка различны, поскольку для списка важен порядок элементов в нем. Также обратите внимание, что $[[]]$ не является корректным списком в $L(L(B))$, поскольку только объекты положительного веса разрешаются в качестве элементов списков, а $[]$ имеет вес 0.

Множество $S(X)$ содержит все возможные мультимножества конечного размера, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит X. Например, $S(B)$ состоит из мультимножеств $\{\}$, $\{u\}$, $\{u, u\}$, $\{u, u, u\}$, и так далее. Еще один пример: $S(L(B))$ содержит, например, мультимножества $\{[u]\}$, $\{[u], [u]\}$. Обратите внимание, что мультимножество может содержать несколько равных объектов. Заметьте, что в отличие от списков для мультимножеств не важен порядок элементов, поэтому мультимножество $\{[u], [u, u]\}$ совпадает с мультимножеством $\{[u, u], [u]\}$.

Множество $C(X)$ состоит из всех возможных циклов конечной длины, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит X. Два цикла считаются равными, если они получаются друг из друга циклическим сдвигом. Например, $C(L(B))$ содержит цикл $([u], [u, u], [u, u, u])$. Заметьте, что этот цикл совпадате с циклом $([u, u], [u, u, u], [u])$, но отличается от цикла $([u, u, u], [u, u], [u])$.

Вес списка, мультимножества или цикла равен сумме весов его элементов, например, вес $([u], [u, u], [u, u, u])$ равен 6.

Наконец, последний рассматриваемый способ создания нового типа комбинаторных объектов — пара. Если X и Y — множества комбинаторных объектов, то $P(X, Y)$ представляет собой множество упорядоченных пар объектов, где первый компонент взят из X, а второй — из Y. Например, $P(S(B), L(B))$ содержит в качестве элементов $\langle\{u, u\}, [u, u, u]\rangle$ и $\langle\{\}, [u]\rangle$. Обратите внимание, что в отличие от списков, мультимножеств и циклов, пары могут содержать компоненты нулевого веса.

Дано k, постройте описание множества комбинаторных объектов, которое содержит 1 элемент веса 0, 1 элемент веса 1, 2 элемента веса 2, 5 элементов веса 3, 14 элементов веса 4, 42 элемента веса 5 и k элементов веса 6.

Формат входных данных

На вход подаётся несколько тестов.

Каждый тест содержит одну строку, на которой находится целое число k ($120 \leqslant k \leqslant 140$).

Последняя строка, которую не требуется обрабатывать, содержит число $n = 0$.

Формат выходных данных

Для каждого теста выведите описание множества комбинаторных объектов, удовлетворяющего условию. Не выводите пробелы. Длина описания не должна превышать 2000.

Примеры

стандартный ввод
125 0
стандартный вывод
P(L(P(P(P(P(P(B,L(B)),P(B,L(B))),L(L(B))),P(P(B,L(B)),L(L(B)))),P(L(P(B, B)),L(P(B,B)))))),L(L(B)))

Задача D. Деревья, избегающие левых расчёсок

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

Структуры, избегающие определенных подструктур, активно изучаются в комбинаторике. В этой задаче мы изучим деревья, избегающие определенных поддеревьев.

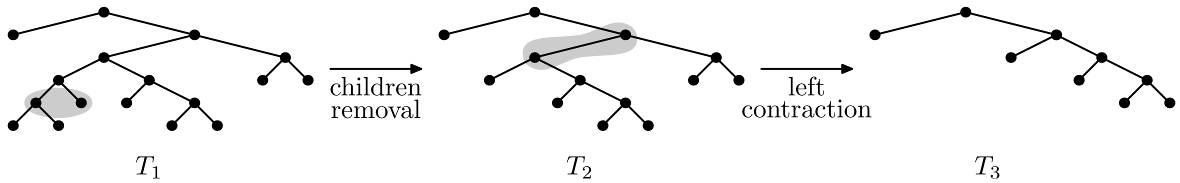
Рассмотрим подвешенное двоичное дерево, в котором каждая вершина имеет ровно двух детей: левого и правого (внутренняя вершина), или не имеет ни одного ребенка (лист). В особом случае дерева из одной вершины его корень также считается листом.

Будем говорить, что дерево T стягивается к дереву R, если R можно получить из T последовательностью следующих операций:

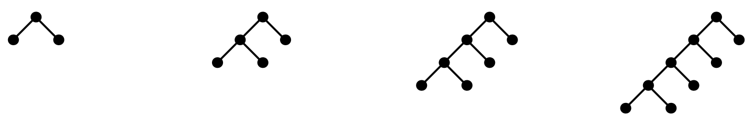
- Удаление детей: удалить оба поддерева у внутренней вершины, превратив ее в лист.
- Левое стягивание: пусть y — левый сын x. Заменим детей x на детей y.
- Правое стягивание: пусть y — правый сын x. Заменим детей x на детей y.

Дерево T избегает дерева R, если T не стягивается к дереву R.

Рисунок ниже показывает описанные операции, также он демонстрирует, что дерево T_1 стягивается к дереву T_3.

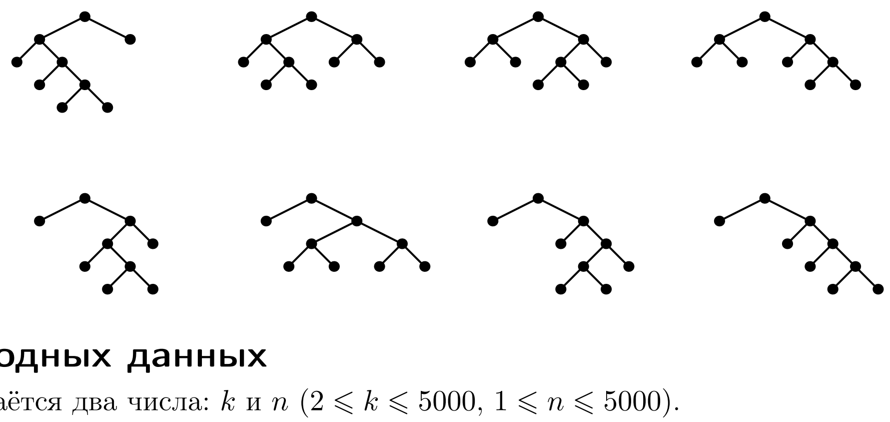


Левой расческой порядка k называется дерево с k листьями, где правый сын любой вершины представляет собой лист. На рисунке ниже показаны левые расчески порядка k для k от 2 до 5.



По заданному k и n вычислите для всех i от 1 до n количество деревьев с i листьями, избегающих левых расчесок порядка k. Выведите эти числа по модулю $998\,244\,353$.

Все деревья с 5 листьями, избегающие левых расчесок порядка 4, показаны на рисунке.



Формат входных данных

На вход подаётся два числа: k и n ($2 \leqslant k \leqslant 5000$, $1 \leqslant n \leqslant 5000$).

Формат выходных данных

Выведите n целых чисел: для каждого i от 1 до n выведите число деревьев с i листьями, избегающих левых расчесок порядка k, выводите числа по модулю $998\,244\,353$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
4 5	1 1 2 4 8
7 6	1 1 2 5 14 42