Теоретический минимум по стереометрии

Д. П. Кириенко, Denis.Kirienko@gmail.com

Летняя компьютерная школа

Содержание

Обозначения

Будем придерживаться следующих обозначений:

Точки в пространстве: A, B, C, D, ...

Вектора: $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{AB}$, ...

Координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}$: $(a_x,\ a_y,\ a_z)$.

Углы: $\angle AOB$.

1 Вектора

Точки и вектора на плоскости задаются тройкой координат (a_x, a_y, a_z).

Расстояние от начала координат до точки $P(x, y, z)$ легко находится по теореме Пифагора и равно $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Аналогично находится и длина вектора: $|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Расстояние между двумя точками $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$ вычисляется, как длина вектора $\overline{A_0A_1}$: $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Нормализованным вектором называется вектор единичной длины, сонаправленный данному. Его координаты есть $\left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}, \frac{a_z}{|a|}\right)$.

1.1 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y, b_z)$ определяется как

$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между ними.

Выражение скалярного произведения через координаты: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Легко видеть, что скалярное произведение линейно по каждому аргументу:

$(\overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$

$(k\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) = k(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}})$.

Аналогичные утверждение верны и для второго аргумента.

Поскольку косинус — четная функция, то скалярное произведение коммутативно: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$.

Скалярное произведение необходимо использовать, когда нужно проверить два вектора (два отрезка, две прямые) на перпендикулярность, поскольку $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = 0$ тогда и только тогда, когда ненулевые вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами — острый, и отрицательно, если тупой.

1.2 Ориентированные тройки векторов

Рассмотрим три некомпланарных (не лежащий в одной плоскости) вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$. Будем называть тройку **правой или положительной**, если вектор $\overline{\mathbf{c}}$ направлен по ходу движения правого винта, который закручивают по направлению от вектора $\overline{\mathbf{a}}$ к вектору $\overline{\mathbf{b}}$, более точно, вектор $\overline{\mathbf{c}}$ и вектор, направленный по ходу правого винта, лежат в одном полупространстве относительно плоскости, задаваемой векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Иначе тройка называется **левой или отрицательной**.

Также можно представить, что правая тройка соответствует трем пальцам правой руки, если считать, что вектор $\overline{\mathbf{a}}$ — первый палец, вектор $\overline{\mathbf{b}}$ — второй палец, вектор $\overline{\mathbf{c}}$ — третий палец, отложенные из одной точки. Левая тройка соответствует трем пальцам левой руки.

Легко видеть, что если $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$ — правая тройка, то $(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ и $(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}})$ — тоже правые тройки, а $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}})$, $(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$ и $(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}})$ — левые тройки.

1.3 Ориентированный объем параллелепипеда

Рассмотрим три вектора: $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$. Ориентированным объемом параллелепипеда $\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\rangle$ называется величина объема параллелипипеда, натянутого на вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$, отложенные из одной точки, взятая со знаком “+”, если данная тройка векторов является правой или со знаком “−”, если тройка векторов является левой.

Свойства ориентированого объема

1. Ориентированный объем равен $\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\rangle = S_{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}} \cdot h$, где $S_{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}}$ — площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, h — высота параллелепипеда, считая, что его основание натянуто на вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, при этом высота имеет знак “+” или “−” в зависимости от того, является ли тройка векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ правой или левой. Иными словами, h есть проекция вектора $\overline{\mathbf{c}}$ на ось, перпендикулярную векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ и образующую с ними правую тройку.

2. $\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\rangle = \langle\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\rangle = \langle\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}\rangle = -\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}\rangle = -\langle\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}\rangle = -\langle\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\rangle$.

3. $\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, k\overline{\mathbf{c}}\rangle = k\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\rangle$.

4. $\langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c_1}} + \overline{\mathbf{c_2}}\rangle = \langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c_1}}\rangle + \langle\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c_2}}\rangle$,

5. Из предыдущих свойств следует, что ориентированный объем линеен по каждому из своих аргументов.

1.4 Векторное произведение векторов

Векторное произведение двух трехмерных векторов $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y, b_z)$ определяется как вектор, модуль котого равен $|\overline{\mathbf{c}}| = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot |\sin\varphi|$, где φ — угол между векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, направлен вектор $\overline{\mathbf{c}}$ ортогонально векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, и при этом тройка $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ является правой.

Свойства векторного произведения:

1. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ ортогонален как $\overline{\mathbf{a}}$, так и $\overline{\mathbf{b}}$.

2. $\langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}} \rangle = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, [\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}])$.

3. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}]$.

4. $[\overline{\mathbf{a}}, k\overline{\mathbf{b}}] = k[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$.

5. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}} + \overline{\mathbf{b_2}}] = [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}}] + [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_2}}]$.

Докажем последнее свойство. Оно эквивалентно тому, что вектор $\overline{\mathbf{d}} = [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}} + \overline{\mathbf{b_2}}] - [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}}] - [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_2}}]$ — нулевой, то есть $(\overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}}) = 0$. Имеем: $(\overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}} + \overline{\mathbf{b_2}}] - [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}}] - [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_2}}], \overline{\mathbf{d}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}} + \overline{\mathbf{b_2}}], \overline{\mathbf{d}}) - ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}}], \overline{\mathbf{d}}) - ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_2}}], \overline{\mathbf{d}}) = \langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}} + \overline{\mathbf{b_2}}, \overline{\mathbf{d}} \rangle - \langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_1}}, \overline{\mathbf{d}} \rangle - \langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b_2}}, \overline{\mathbf{d}} \rangle = 0$.

Из всех этих свойств следует, что векторное произведение линейно по каждой компоненте. Это позволит нам выразить векторное произведение через координаты.

Сначала выясним, чему равно векторное произведение векторов базиса $\overline{\mathbf{e_x}}$, $\overline{\mathbf{e_y}}$, $\overline{\mathbf{e_z}}$: $[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_x}}] = [\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_y}}] = [\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_z}}] = 0$, $[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_y}}] = \overline{\mathbf{e_z}}$, $[\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_z}}] = \overline{\mathbf{e_x}}$, $[\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_x}}] = \overline{\mathbf{e_y}}$, $[\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_x}}] = -\overline{\mathbf{e_z}}$, $[\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_y}}] = -\overline{\mathbf{e_x}}$, $[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_z}}] = -\overline{\mathbf{e_y}}$.

Поскольку $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y, a_z) = a_x\overline{\mathbf{e_x}} + a_y\overline{\mathbf{e_y}} + a_z\overline{\mathbf{e_z}}$, $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y, b_z) = b_x\overline{\mathbf{e_x}} + b_y\overline{\mathbf{e_y}} + b_z\overline{\mathbf{e_z}}$, то $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = [a_x\overline{\mathbf{e_x}} + a_y\overline{\mathbf{e_y}} + a_z\overline{\mathbf{e_z}}, b_x\overline{\mathbf{e_x}} + b_y\overline{\mathbf{e_y}} + b_z\overline{\mathbf{e_z}}] = a_xb_x[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_x}}] + a_xb_y[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_y}}] + a_xb_z[\overline{\mathbf{e_x}}, \overline{\mathbf{e_z}}] + a_yb_x[\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_x}}] + a_yb_y[\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_y}}] + a_yb_z[\overline{\mathbf{e_y}}, \overline{\mathbf{e_z}}] + a_zb_x[\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_x}}] + a_zb_y[\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_y}}] + a_zb_z[\overline{\mathbf{e_z}}, \overline{\mathbf{e_z}}] = a_xb_y\overline{\mathbf{e_z}} - a_xb_z\overline{\mathbf{e_y}} - a_yb_x\overline{\mathbf{e_z}} + a_yb_z\overline{\mathbf{e_x}} + a_zb_x\overline{\mathbf{e_y}} - a_zb_y\overline{\mathbf{e_x}} = \overline{\mathbf{e_x}}(a_yb_z - a_zb_y) + \overline{\mathbf{e_y}}(a_zb_x - a_xb_z) + \overline{\mathbf{e_z}}(a_xb_y - a_yb_x)$.

Таким образом, векторное произведение будет иметь координаты:

$$(a_yb_z - a_zb_y, a_zb_x - a_xb_z, a_xb_y - a_yb_x).$$

Более компактно формулу векторного произведения можно записать через определитель матрицы 3×3:

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{e_x}} & \overline{\mathbf{e_y}} & \overline{\mathbf{e_z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем в матричном виде ориентированный объем параллелепипеда $\langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}} \rangle$. Если $\overline{\mathbf{c}}$ имеет координаты (c_x, c_y, c_z), а ориентированный объем равен скалярному произведению $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ и $\overline{\mathbf{c}}$, то получить ориентированный объем параллелепипеда можно, заменив в разложении $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ по базису $\overline{\mathbf{e_x}}$, $\overline{\mathbf{e_y}}$, $\overline{\mathbf{e_z}}$ базисные вектора на c_x, c_y, c_z соответственно. Тогда

$$\langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}} \rangle = \begin{pmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство следует из того, что $\langle \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} \rangle$.

2 Прямые

Прямую в пространстве можно задавать:

1. Двумя несовпадающими точками P и Q.

2. Точкой P и направляющим вектором $\overline{\mathbf{a}}$.

3. Параметрически: $x = x_0 + a_xt$, $y = y_0 + a_yt$, $z = z_0 + a_zt$, где $t \in \mathbb{R}$ — параметр, (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка на прямой, $\overline{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ — направляющий вектор.

Также можно задавать прямую, как пересечение двух плоскостей, но такое представление неудобно.

3 Плоскости

Плоскости в пространстве можно задавать:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой.

2. Точкой и двумя неколлинеарными направляющими векторами.

3. Параметрически: $x = x_0 + a_x t + b_x s$, $y = y_0 + a_y t + b_y s$, $z = z_0 + a_z t + b_z s$, где $s, t \in \mathbb{R}$ — параметры, (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка на прямой, $\overline{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{\mathbf{b}} = (b_x, b_y, b_z)$ — направляющие вектора.

4. Уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C не все равны 0.

3.1 Нормаль к плоскости и направляющие вектора

Рассмотрим плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и произвольные две точки на этой прямой: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Поскольку $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, то $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$.

Последнее равенство означает, что вектор $\overline{\mathbf{n}}(A, B, C)$ ортогонален вектору $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поскольку точки P_1 и P_2 — произвольные точки на плоскости, то вектор $\overline{\mathbf{n}}$ ортогонален любому вектору плоскости, а, значит, этот вектор ортогонален всей плоскости, то есть является вектором нормали.

Научимся переходить между разными формами представления плоскости.

Если плоскость задана уравнением, то для задания его тремя точками, параметрически или направляющими векторами достаточно получить одну точку, лежащую на плоскости, и два неколлинеарных направляющих вектора. В качестве направляющих векторов можно взять любые два неколлинераных вектора, ортогональных вектору нормали.

Для перехода от задания плоскости тремя точками, параметрически, точкой и направляющимим векторами к уравнению, найдем сначала вектор нормали. Поскольку нормаль ортогональна направляющим векторам, то в качестве нормали можно взять векторное произведение направляющих векторов. Это даст нам коэффициенты A,B, C уравнения прямой. Свободный член D уравнения можно получить из условия, что одна данная нам точка принадлежит плоскости.

4 Расстояние от точки до плоскости

4.1 Плоскость, параллельная данной и удаленная на расстояние h

Пусть дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Если изменять значение коэффициента D, зафиксировав при этом значения A, B и C, то мы получим семейство параллельных плоскостей. Как получить из этого семейства плоскость, параллельную исходной и удаленной от нее на заданное расстояние h?

Вектор нормали к этой плоскости будет иметь вид (A, B, C). Длина этого вектора $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Поделив вектор на его длину, получим вектор $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$ единичной длины. Умножив его на h, получим вектор $\left(\frac{Ah}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{Bh}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \frac{Ch}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$. Этот вектор будет нормальным к исходной плоскости и его длина равна h. Искомая плоскость получается из исходной сдвигом на этот вектор.

Таким образом, если точка (x, y, z) принадлежала исходной плоскости, то точка (x', y', z'), где $x' = x + \frac{Ah}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $y' = y + \frac{Bh}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $z' = z + \frac{Ch}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, принадлежит искомой плоскости.

Запишем уравнение $Ax+By+Cz+D = 0$ и подставим в него $x = x' - \frac{Ah}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $y = y' - \frac{Bh}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $z = z' - \frac{Ch}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ получим уравнение:

$$Ax' - \frac{A^2h}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + By' - \frac{B^2h}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + Cy' - \frac{C^2h}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + D = 0$$

или

$$Ax' + By' + Cz' + D - h\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 0.$$

Уравнение второй плоскости, удаленной на расстояние h от исходной, но в направлении, противоположном нормали, имеет вид:

$$Ax' + By' + Cz' + D + h\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0.$$

4.2 Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка (x_0, y_0, z_0). Найдем расстояние от этой точки до плоскости.

Пусть искомая точка удалена на расстояние h от данной плоскости (будем считать, что h может быть отрицательной величиной). Тогда плоскость $Ax+By+Cz+D-h\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 0$ проходит через точку (x_0, y_0, z_0), откуда

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - h\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$$

Преобразовав, получаем:

$$h = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В этой формуле величина h может быть отрицательной, поэтому расстояние от точки до плоскости равно $|h|$.

Эту формулу необходимо знать наизусть.

5 Русско-английский словарик

точка	point
вектор	vector
прямая	line
плоскость	plane
пространство	space
луч	ray
отрезок	segment
угол	angle
окружность	circle
треугольник	triangle
прямоугольник	rectangle
квадрат	square
многоугольник	polygon
тетраэдр	tetrahedron
параллелепипед	parallelepiped
окружность	circle
медиана	median
биссектриса	bissector
высота	altitude
пересечение	intersection
длина	length
периметр	perimeter
площадь	area
объем	volume
касательная	tangent
скалярное произведение	dot product
векторное произведение	cross product
смешанное произведение	mixed product (scalar triple product)
ориентированный объем	oriented volume
вектор нормали	normal vector
матрица	matrix
определитель	determinant