

Семинар «Основные понятия теории графов»

Задача 1. В поселке Налимиха 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор – Диме и Никите, а также по соседству живут Евгений с Никитой, Иван с Сергеем, Евгений с Димой, Сергей с Антоном и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Определения. *Графом* называется множество *вершин* и множество пар вершин – *ребер*. На рисунках вершины обозначаются точками, а те пары вершин, между которыми есть ребро, соединяются линией (отрезком или кривой). При изображении графа не важно, как вершины будут расположены на плоскости и какими линиями они будут соединены, важно лишь, какие вершины с какими будут соединены.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены *путем*, т. е. последовательностью ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего. В противном случае говорят, что граф *несвязный*. Нетрудно заметить, что граф разбивается на *компоненты связности*, т.е. такие подграфы, которые являются связными, при этом между различными компонентами связности не существует ни одного пути.

Задача 2. Петр, пробираясь огородами до Никиты, сделал себе москитную сетку, в которой ровно 100 узелков, и любые два узелка соединены ниточкой. Сколько ниточек потратил Петр на это бесполезное занятие?

Определения. *Степенью вершины* называется количество выходящих из нее ребер. Граф называется *полным*, если в нем каждая вершина соединена ребром с каждой другой. Если граф полный и в нем N вершин, то степени всех вершин равны $N-1$.

Докажите следующее утверждение:

Утверждение 1. В полном графе с N вершинами $N*(N-1)/2$ ребер.

Задача 3. В посёлке Налимиха 9 домов. Пётр, пробираясь огородами до Никиты, сделал вывод, что от каждого дома к другим домам тянется по три провода. Не померещилось ли ему?

Докажите следующие утверждения.

Утверждение 2. В графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Утверждение 3. В графе всегда четное количество вершин нечетной степени.

Утверждение 4. В каждой компоненте связности всегда четное количество вершин нечетной степени.

Задача 4. Может ли в государстве, где из каждого города выходит по три дороги к другим городам, быть ровно 100 дорог?

Задача 5. Может ли в государстве, где из каждого города выходит по три дороги к другим городам, быть ровно 100 городов?

Задача 6. Докажите, что в графе обязательно есть две вершины одинаковой степени.

Задача 7. Существуют ли графы, степени вершин которых равны:

- 1) 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1;
- 2) 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1;
- 3) 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1;
- 4) 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2?

Задача 8. В поселке Налимиха 9 домов и от каждого тянутся телеграфные провода не менее, чем к четырем другим домам. Посредством этих телеграфов распространяются слухи. Докажите, что рано или поздно до всех в поселке дойдет слух об исчезновении яблок.

Задача 9. В архипелаге несколько островов, соединенных мостами между собой. С острова Зюсюки выходит 2003 моста, с острова Дюдюки – один, а со всех остальных островов по 1000 мостов. Докажите, что с Дюдюков по мостам можно попасть на Зюсюки.

Задача 10. В связном графе все вершины имеют степень 100. Докажите, что после удаления любого из ребер он остается связным.