

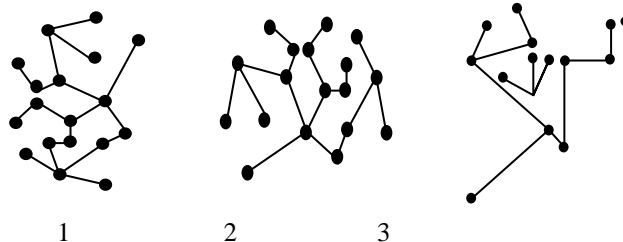
**ЛКШ-2009.июль. Параллель С**  
**Семинар «Деревья»**

*Простым путем* в графе называется путь, в котором никакая вершина не встречается дважды.

*Циклом* в графе называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину.

*Деревом* называется связный граф, не имеющий циклов.

1. Какие из изображенных на рисунке графов являются деревьями?
2. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.
3. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
4. Докажите, что в дереве число вершин на 1 больше числа ребер.
5. Докажите, что связный граф с  $N$  вершинами и  $N-1$  ребрами является деревом.
6. Докажите, что граф без циклов с  $N$  вершинами и  $N-1$  ребрами является деревом.
7. Докажите, что в дереве с не менее чем двумя вершинами есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).
8. Докажите, что в дереве с не менее чем двумя вершинами есть хотя бы две висячие вершины.
9. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
10. Докажите, что из связного графа всегда можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево.
11. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.
12. Волейбольная сетка имеет форму прямоугольника размером  $50 \times 600$  клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
13. Есть такая сеть метро, что с любой станции можно добраться до любой другой, не поднимаясь на поверхность. Докажите, что мы можем закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого можно было бы добраться с любой из оставшихся станций на любую другую.
14. Пусть дерево имеет  $K$  висячих вершин и не имеет вершин степени 2. Докажите, что при  $K \geq 2$  общее количество вершин не превосходит  $2K-2$ .



**ЛКШ-2009.июль. Параллель С**  
**Семинар «Деревья»**

*Простым путем* в графе называется путь, в котором никакая вершина не встречается дважды.

*Циклом* в графе называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину.

*Деревом* называется связный граф, не имеющий циклов.

1. Какие из изображенных на рисунке графов являются деревьями?
2. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.
3. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
4. Докажите, что в дереве число вершин на 1 больше числа ребер.
5. Докажите, что связный граф с  $N$  вершинами и  $N-1$  ребрами является деревом.
6. Докажите, что граф без циклов с  $N$  вершинами и  $N-1$  ребрами является деревом.
7. Докажите, что в дереве с не менее чем двумя вершинами есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).
8. Докажите, что в дереве с не менее чем двумя вершинами есть хотя бы две висячие вершины.
9. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
10. Докажите, что из связного графа всегда можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево.
11. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.
12. Волейбольная сетка имеет форму прямоугольника размером  $50 \times 600$  клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
13. Есть такая сеть метро, что с любой станции можно добраться до любой другой, не поднимаясь на поверхность. Докажите, что мы можем закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого можно было бы добраться с любой из оставшихся станций на любую другую.
14. Пусть дерево имеет  $K$  висячих вершин и не имеет вершин степени 2. Докажите, что при  $K \geq 2$  общее количество вершин не превосходит  $2K-2$ .

