Сочетания

Сочетанием из n по k называют подмножество n-элементного множества, содержащее ровно k элементов. Например, если в качестве множества рассматривать натуральные числа от 1 до 5, то сочетания из 5 по 4 – это 4-элементные подмножества множества {1,2,3,4,5}:

{2, 3, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 4}.

Количество сочетаний из *n* по *k* обозначают через C_n^k и называют *биномиальными коэффициентами*. Их вычисление подробно обсуждается в главе "Динамическое программирование". Обсудим задачу перечисления всех сочетаний. Конечно, можно перебирать все подмножества, и выбирать их них те, которые имеют нужную длину, но это может потребовать слишком много времени. Например, если n=1000, а k=2, то количесто подмножеств равно 2^{1000}, а количество сочетаний из 1000 по 2 – всего 1000 * 999 / 2.

Будем представлять сочетание возрастающей последовательностью его элементов. Например, сочетание {1, 5, 3, 2} будем представлять как последовательность 1, 2, 3, 5. Для таких последовательностей можно ввести естественный лексикографический порядок, например, для последовательностей, соответствующих сочетаниям из 4 по 3:

1, 2, 3 → 1, 2, 4 → 1, 3, 4 → 2, 3, 4.

Сформулируем правило, по которому мы можем получить из некоторого сочетания следующее за ним в лексикографическом порядке. Рассмотрим, например, такое сочетание по 6 элементов из 9: 1, 3, 4, 7, 8, 9. Найдем самую правую цифру, которую мы можем увеличить, не меняя цифр левее ее – это цифра 4. Увеличим ее на 1 – следующее сочетание будет начинаться с 1, 3, 5. Какие числа нужно поставить после 5, чтобы получить наименьшее сочетание с таким началом? Это минимальные числа, большие 5, причем их следует записать в возрастающем порядке: 6, 7, 8. Таким образом, получится сочетание 1, 3, 5, 6, 7, 8.

Как мы нашли самую правую цифру, которую можно увеличить? Последняя цифра равна 9 (n), поэтому ее увеличить нельзя, следующая цифра, равна 8 (n–1), но на этом месте в возрастающей последовательности б'ольшую цифру поставить нельзя и т. д. В общем случае, на i-м месте справа не может стоять число, большее (n–i+1). Таким образом, мы ищем минимальное i (i ≥ 1), такое что на i-м месте справа стоит число, меньшее (n–i+1). Это число мы увеличиваем на 1, а следом за ним записываем числа, большие его на 1, 2, 3 и т. д.