

# Теоретические вопросы

Параллель В+

ЛКШ.Зима.2015

## 1. Игры:

- (a) Понятие игры, выигрышные/проигрышные состояния. Анализ ациклической игры.
- (b) Циклические игры, ничейные состояния. Ретроанализ циклической игры.
- (c) Сумма игр, эквивалентность игр. Игра «ним». Функция Гранди ациклической игры (mex), доказательство эквивалентности соответствующему ниму.
- (d) Правило сложения нимов (xor) с доказательством, поиск выигрышного хода. Пример: полоска из  $n$  белых клеток, закрашиваем  $k$  подряд идущих белых клеток.

## 2. Структуры данных: дерево Фенвика, sqrt-декомпозиция:

- (a) Дерево Фенвика: смысл значений элементов массива  $f$ , нахождение суммы на префиксе, изменение элемента, сложность операций.
- (b) Многомерное дерево Фенвика: смысл значений элементов таблицы  $f$ , нахождение суммы на «префиксе», изменение элемента, сложность операций. Формула включения-исключения для выражения суммы на подпрямоугольнике через суммы на «префиксах».
- (c) \*Фенвик с прибавлением на отрезке: хранение коэффициентов «линейных функций», как делать запросы.
- (d) Sqrt-декомпозиция: применение для задач RMQ и RSQ с прибавлением/присваиванием на отрезке, разбиение массива на блоки, оптимальный размер блока.
- (e) Sqrt-декомпозиция по запросам: задача dynamic connectivity offline.

## 3. Матрицы:

- (a) Умножение матриц, выражение для системы линейных уравнений при помощи матричного умножения.
- (b) Решение систем линейных уравнений при помощи метода Гаусса: «ступенчатый вид», главные и свободные переменные, общий вид решения (выражение главных переменных через свободные), приведение к ступенчатому виду, сложность метода.
- (c) Выражение для количества путей в графе при помощи матричного умножения. Поиск количества путей длины  $k$  за время  $O(n^3 \log k)$  при помощи быстрого возведения матрицы в степень.
- (d) Нахождение  $n$ -го числа Фибоначчи за  $O(\log n)$  при помощи возведения матрицы в степень. Вычисление элементов рекуррентного соотношения, примеры.
- (e) Подсчет количества строк из нулей и единиц без  $k$  нулей подряд, без  $k$  одинаковых символов подряд.

## 4. LCA и RMQ:

- (a) Задача о наименьшем общем предке в дереве (LCA). Решение за  $O(n \log n)$  на предподсчет и  $O(\log n)$  на запрос при помощи двоичных подъемов.
- (b) Сведение задачи LCA к задаче RMQ  $\pm 1$ .

- (c) Решение задачи  $\text{RMQ} \pm 1$  за  $O(n)$  на предподсчет и  $O(1)$  на запрос (алгоритм Фарах-Колтона-Бендера): микроблоки, предподсчет всевозможных микроблоков, sparse table на блоках.
  - (d) Сведение задачи  $\text{RMQ}$  к задаче  $\text{LCA}$ : построение «декартова дерева».
5. Паросочетания в двудольном графе:
- (a) Понятие паросочетания. Эквивалентность максимальности паросочетания и отсутствия «удлиняющих цепей» в двудольном графе.
  - (b) Алгоритм Куна, однопроходное улучшение, сложность.
  - (c) Задача о минимальном вершинном покрытии в двудольном графе, сведение к максимальному паросочетанию (теорема Кёнига).
  - (d) Максимальное независимое множество в двудольном графе.
6. Теория чисел:
- (a) НОД, алгоритм Евклида, расширенный алгоритм Евклида, бинарный алгоритм Евклида.
  - (b) Решение диофантова уравнения  $ax + by = c$  (в целых числах).
  - (c) Модульная арифметика. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера (с доказательством). Деление по модулю, решение уравнения  $ax \equiv b \pmod{m}$ .
  - (d) Китайская теорема об остатках.
  - (e) Первообразный корень по модулю  $m$ . Проверка на первообразный корень (быстрее, чем за  $O(m)$ ), поиск первообразного корня.
  - (f) Решение уравнения  $a^x \equiv b \pmod{m}$  (дискретное логарифмирование) за  $O(\sqrt{m} \log m)$ , случай  $(a, m) \neq 1$ .
  - (g) Решение уравнения  $x^k \equiv a \pmod{m}$  (извлечение корня по модулю): факторизация  $m$  и переход к примарным модулям (вида  $p^k$  для простого  $p$ ), решение по примарному модулю при помощи дискретного логарифмирования по первообразному корню и решения линейного уравнения по модулю  $\varphi(p^k)$ .
7. Конечные автоматы и регулярные языки:
- (a) Понятие детерминированного конечного автомата (ДКА), принятие слова ДКА, задание языка. Прямое произведение ДКА, операции над языками (пересечение, объединение, дополнение).
  - (b) Регулярные выражения, регулярные языки.
  - (c) Понятие недетерминированного конечного автомата (НКА), принятие слова НКА. Детерминизация НКА, алгоритм Томпсона (ДКА с состояниями только для достижимых подмножеств состояний НКА).
  - (d)  $\varepsilon$ -НКА, построение эквивалентного НКА без  $\varepsilon$ -переходов.
  - (e) Эквивалентность автоматных и регулярных языков (теорема Клини): построение автомата по регулярному выражению, построение регулярного выражения по автомату ( $R_{i,j,k}$  — выражение, принимающее все пути из состояния  $i$  в состояние  $j$ , проходящие через вершины с номерами  $1, \dots, k$ ).
  - (f) Проверка изоморфизма ДКА, эквивалентности ДКА. Минимизация ДКА за  $O(an^2)$ .
8. Теория вероятностей:
- (a) Вероятностное пространство, элементарные исходы, функция вероятности. Примеры.
  - (b) События, вероятность событий.
  - (c) Условная вероятность двух событий. Независимость двух событий.
  - (d) Формула полной вероятности. Формула Байеса.
  - (e) Случайная величина, мат. ожидание случайной величины. Линейность мат. ожидания. Примеры.

- (f) Задача о разорении, вероятность разорения, среднее число шагов. Понятие марковской цепи, нахождение вероятности поглощения заданным состоянием и среднего числа шагов при помощи метода Гаусса.