

Плюшевая геометрия (информатика)

1. Учимся вычислять площадь.

- Изначально достаточно знать формулу измерения площади прямоугольника. Из нее легко (разрезаниями, перекладываниями кусочков) получить формулы для площади параллелограмма, треугольника, трапеции.

Прямоугольник со сторонами a, b : $a * b$.

Параллелограмм со стороной a , высотой h : $a * h$.

Треугольник со сторонами a, b, c : $\sqrt{p * (p - a) * (p - b) * (p - c)}$

Треугольник со основанием c , высотой h : $\frac{1}{2} c * h$

Трапеция со сторонами a, b , высотой h : $\frac{1}{2} (a + b) * h$

- **Научимся вычислять площадь "кроссворда"** — многоугольника со сторонами параллельными осям координат. Многоугольник задан последовательностью координат своих вершин и расположен в первой координатной четверти.

Последовательно идем от вершины к вершине. Если идем по вертикали, то не делаем ничего, если по горизонтали вправо, то прибавляем площадь прямоугольника под этим отрезком, если влево — вычитаем площадь прямоугольника под этим отрезком. Если мы обходили многоугольник по часовой стрелке, мы получим его площадь, а если против — его площадь со знаком минус, то есть, результат надо взять модуль результата.

- Теперь возьмем **произвольный многоугольник** с вершинами в узлах сетки. Многоугольник по-прежнему задан последовательностью координат своих вершин и расположен в первой координатной четверти.

Последовательно идем от вершине к вершине, с каждой стороной прибавляя (или вычитая) трапецию под ней. Например, идя от первой вершины ко второй, прибавляем к общей площади $(y_1 + y_2) * (x_2 - x_1) / 2$. Действительно, y_1 и y_2 — основания трапеции, $(x_2 - x_1)$ — ее высота. Причем, если $x_2 < x_1$, то мы идем налево и площадь трапеции войдет в общую сумму со знаком минус, что нам и нужно.

- Привязку к сетке мы нигде не используем, поэтому вершины можно расположить где угодно, не обязательно в узлах.
- Прибавив одно и то же число ко всем координатам y (подвинув ось x), можно всегда добиться расположения многоугольника в первой четверти. Вообще от движения оси x , формула подсчета не меняется, поэтому многоугольник может быть расположен, где угодно. В этом месте на этой лекции у меня возникла интересная дискуссия о смысле формулы $(y_1 + y_2) * (x_2 - x_1) / 2$, если сторона пересекает ось x . Куда делись трапеции? Почему мы по-прежнему

считаем площадь между отрезком и осью (тут надо не забыть про знак)?

- Если первую вершину многоугольника дописать в массив вершин после последней, то последняя сторона обрабатывается тем же циклом, что и все остальные.

2. Применяем измерение площадей.

- Чтобы проверить **лежит ли точка на прямой**, проходящей, через две другие точки, посчитаем площадь треугольника с вершинами в этих трех точках.
- Проверим **лежит ли точка внутри выпуклого многоугольника**. Сравним площадь этого многоугольника и сумму площадей треугольников с вершинами: две последовательные вершины многоугольника и данная точка.
- Считая площади треугольников, надо не забыть, что они бывают отрицательными. И если про это забыть и просуммировать площади треугольников взятые с их знаками, то всегда получится площадь многоугольника, даже если точка вне него.
- Также не вредно понять, зачем требование выпуклости многоугольника.

3. Пересечение прямоугольников на плоскости

- Для того, чтобы задать прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, надо знать две его противоположные вершины. Можно считать, что это нижняя левая и верхняя правая (если это не так, то приведем данные к такому виду)
- Даны несколько таких прямоугольников. Их пересечение, если не пусто, тоже является таким прямоугольником. Нужно найти две вершины, задающие его.
- Тут полезно осознать сначала задачу о пересечении отрезков на прямой. А потом понять, что для каждой координаты у нас как раз решается задача об отрезках.

4. Площадь объединения прямоугольников на плоскости

- Даны несколько прямоугольников, как в предыдущей задаче, с вершинами в узлах сетки. Нужно найти площадь их объединения.
- Полезно понять, что их объединение вовсе не обязательно прямоугольник, и вообще, может не быть многоугольником.
- Заведем двумерный массив, каждая ячейка которого соответствует клетке на сетке, заполним его нулями. Размеры выберем так, чтобы все прямоугольники заведомо были внутри. Для каждого прямоугольника прибавим единички к тем клеткам, которые он занимает. Потом по этому массиву посчитаем площадь

занятых клеток. Также можно посчитать площадь области, покрытой двумя прямоугольниками и т.п.

- Для этого способа требуется много памяти. Если стороны прямоугольников большие (или вычислены с высокой точностью), а самих прямоугольников немного, то полезно применить **сжатие координат**. Сохраним массив координат по оси x , массив координат по оси y , отсортируем эти массивы по возрастанию. Для каждого прямоугольника отыщем его конец и начало в этих массивах (бинарный поиск) и прибавим единичку к соответствующим ячейкам двумерного массива. Теперь двумерный массив нужен размера $2n \times 2n$, где n — количество прямоугольников. По сути, в качестве границ клеток сетки теперь используются только те горизонталы и вертикали, через которые проходят стороны прямоугольника.
- Посмотрим теперь, что будет для задачи **объединения отрезков на прямой**. Можно действовать аналогично, но можно проще: упорядочиваем все координаты концов отрезков, но про каждую из них помним начинается в ней отрезок или заканчивается. Идем от самой меньшей к самой большей и встречая конец отрезка, увеличиваем счетчик количества отрезков, а встречая начало отрезка, уменьшаем счетчик количества отрезков. Теперь мы знаем, на каком участке прямой сколько отрезков и можем найти длину объединения, само объединение, область, покрытую двумя отрезками и т.п.
- Здесь есть тонкость, что концы и начала некоторых отрезков могут совпасть. И при сортировке можно сначала расположить все начала, а потом все концы с одинаковой координатой, можно наоборот. То, как надо поступить, зависит от задачи. Для вычисления длины, например, не важно, для нахождения объединения отрезков сначала должны быть начала, а для объединения интервалов, сначала должны быть концы.
- Полезно также понять, почему такой подход не работал для площади объединения прямоугольников.