1. Докажите, что трансверсальный матроид — это действительно матроид.

   Определение 1. Трансверсальный матроид — это матроид, носителем которого является множество вершин левой доли некоторого двудольного неориентированного графа, а независимыми считаются такие подмножества, которые можно покрыть паросочетанием в этом двудольном графе.

2. Это задача о задании матроида рангами.

   Определение 2. Пусть M — носитель матроида. *Ранг* множества $A \subseteq M$ — наибольший размер независимого подмножества A.

   Рассмотрим любое конечное множество M. Рассмотрим любую функцию $r\colon 2^M \to \mathbb{N}_0$ (то есть сопоставляющую каждому подмножеству M целое неотрицательное число), обладающую следующими тремя свойствами, называемыми *аксиомами ранга*:

   R1. $r(A) \leqslant |A|$ для любого $A \subseteq M$.

   R2. Если $A \subseteq B \subseteq M$, то $r(A) \leqslant r(B)$.

   R3. Если $A, B \subseteq M$, то $r(A) + r(B) \geqslant r(A \cap B) + r(A \cup B)$.

   Докажите, что r является ранговой функцией ровно одного матроида на носителе M.

3. Это задача о задании матроида циклами.

   Определение 3. Пусть M — носитель матроида. Множество $A \subseteq M$ называется *циклом* в этом матроиде, если оно зависимо, а любое его подмножество — независимо.

   Рассмотрим любое конечное множество M. Рассмотрим любое множество $\mathcal{C} \subseteq 2^M$ (то есть некоторое семейство подмножеств M), обладающее следующими двумя свойствами, называемыми *аксиомами циклов*:

   C1. $\varnothing \notin \mathcal{C}$.

   C2. Никакие два различных множества $A, B \in \mathcal{C}$ не содержатся одно в другом.

   C3. Пусть $A, B \in \mathcal{C}$, $x \in A \cap B$. Тогда в $(A \cup B) \setminus \{x\}$ есть подмножество из $\mathcal{C}$.

   Докажите, что $\mathcal{C}$ является множеством циклов ровно одного матроида на носителе M.

4. Это задача о существовании двойственного матроида.

   Определение 4. Пусть M — носитель матроида. Множество $A \subseteq M$ называется *базой* в этом матроиде, если оно независимо, а любое его надмножество — зависимо. Множество $A \subseteq M$ называется *кобазой* в этом матроиде, если $\overline{A} = M \setminus A$ — база.

   Напомним, что $\mathcal{B} \subseteq 2^M$ является множеством всех баз некоторого матроида на носителе M тогда и только тогда, когда оно обладает тремя свойствами, называемыми *аксиомами баз*:

   B1. Есть хотя бы одна база: $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

   B2. Никакие два различных множества $A, B \in \mathcal{B}$ не содержатся одно в другом.

   B3. Для любых двух баз $A, B \in \mathcal{B}$ и любого элемента $x \in A \setminus B$ найдётся элемент $y \in B \setminus A$, что $(A \setminus \{x\} \cup \{y\}) \in \mathcal{B}$.

   При этом такое множество баз однозначно задаёт матроид на носителе M.

   Докажите, что кобазы матроида на M являются всеми базами ровно одного матроида на носителе M.

5. Это задача о том, что разрезный и графовый матроид — это два разных типа матроида.

Определение 5. *Графовый матроид* для неориентированного графа (V, E) — это матроид на носителе E, независимыми множествами которого являются ациклические подмножества рёбер графа. *Разрезный матроид* для неориентированного графа (V, E) — это матроид на носителе E, независимыми множествами которого являются такие подмножества рёбер графа, при удалении которых из графа его компоненты связности не меняются.

Неориентированный граф называется *простым*, если в нём нет петель и кратных рёбер.

Назовём элемент x матроида *бесполезным*, если множество $\{x\}$ зависимо. Два матроида назовём *похожими*, если после удаления из них всех бесполезных элементов они совпадают: то есть есть биекция f между полезными элементами, для которой множество X независимо в первом матроиде тогда и только тогда, когда $f(X)$ независимо во втором.

Докажите, что существует графовый матроид на простом графе, не похожий на разрезный ни для какого графа (даже для непростого), и существует разрезный матроид на простом графе, не похожий на графовый ни для какого графа (даже для непростого).

6. Есть неориентированный граф из n вершин, в i-й вершине a_i солдат, за день солдат может перейти в соседнюю вершину. За какое минимальное количество дней можно получить b_i солдат в каждой вершине? Решить за полиномиальное от n время.

7. Есть матрица, в ней есть столица и непроходимые клетки. У каждой свободной клетки есть стоимость ее уничтожить. Сколько надо заплатить, чтобы нельзя было дойти от края матрицы до столицы?

8. Дано n элементов, их нужно разбить на два множества. Для каждого элемента дана стоимость поместить его в первое и второе множество, а также для всех пар (i, j) дан штраф c_{ij} за то, что они лежат в разных множествах. Найти минимальную стоимость разбиения всех элементов на два множества.

9. Дан неориентированный граф. Для заданных вершин A, B и C найти вершинно простой путь из A в C, проходящий через B.

10. Дана сеть с пропускными способностями. Проверьте, единственнен ли минимальный s–t разрез в этом графе.

11. Пусть $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее вещественного числа x. Пусть x — любое положительное вещественное число. Докажите два простых равенства:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant x}} \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant x}} d(n); \qquad \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant x}} n\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant x}} \sigma(n).$$