1. Дан полный взвешенный граф G с положительными весами, в котором выбраны k вершин. Найти подграф минимального веса, связывающий эти вершины за $\mathcal{O}(3^k \cdot n + 2^k \cdot n^2)$.

2. Дан массив из n чисел (возможно, отрицательных).

   a. Найдите в нем три непересекающихся подотрезка с наибольшей сумммой за $\mathcal{O}(n)$.

   b. Решите предыдущий пункт в случае, когда массив зациклен.

3. Посчитать количество способов вырезать клетки из таблички 6×500 таким образом, что невырезанные клетки можно замостить доминошками. Для оценки числа состояний можно использовать программу.

4. Задан массив a размера $n-1$, состоящий из 0 и 1. Посчитайте за $\mathcal{O}(n^2)$ количество перестановок размера n, для которых выполняется следующее условие: если a_i равно 0, то число i в перестановке идёт раньше числа $i+1$, если 1, то позже.

5. Даны n чисел от 0 до 127. Разбить их на четыре множества так, чтобы максимизировать минимум значений побитового исключающего «или» в множествах.

   a. $n \le 50$.

   b. $n \le 500$.

6. Есть строка t и набор правил. Каждое правило позволяет удалить из t подстроку, равную s_i. Для каждого символа строки t известен бонус за удаление этого символа. Определите максимальный суммарный бонус, который можно получить, применяя правила сколько угодно раз в произвольном порядке.

   a. $\mathcal{O}(n^4)$ времени и $\mathcal{O}(n^3)$ памяти.

   b. $\mathcal{O}(n^4/w)$ времени и $\mathcal{O}(n^3/w)$ памяти, где w — размер машинного слова (32 или 64).

7. Дан чёрно-белый прямоугольник w на h. Найти в нём наибольший подквадрат максимального размера с не более чем k чёрными клетками. $\mathcal{O}(wh)$.

8. Диаграмма Юнга — это конечный набор клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность. Дана диаграмма Юнга из $n \le 40$ клеток, посчитать число способов расставить в её клетках различные числа от 1 до n так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа возрастали.

9. Дано $n \le 10^5$ камней, высота i-го камня h_i. $h_1 < h_2 < \dots < h_n$. Ляшушка хочет попасть с первого камня на последний, стоимость прыжка с камня i на камень j равняется $(h_j - h_i)^2 + C$. Найти минимальную стоимость, за которую лягушка может попасть с первого камня на последний.

10. Есть x брёвен длины a и y брёвен длины b и число k, где $x, y, a, b, k \le n$. Нужно составить k рядов, чтобы длина минимального из рядов была максимальна.

    a. $\mathcal{O}(n^3 \log n)$.

    b. $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

11. Даны n предметов. У каждого есть цена c_i и вес w_i. Есть два рюкзака вместимости S, найдите максимальную стоимость набора предметов, которые поместятся в эти два рюкзака за $\mathcal{O}(nS^2)$ с $\mathcal{O}(S^2)$ памяти.

12. Даны две последовательности, найти наибольшую общую возрастающую за $\mathcal{O}(n^2)$

13. Дано дерево и набор путей в нем. Каждый путь задан своими концами. Проверьте, существует ли вершина дерева, которая лежит на каждом из путей, за $\mathcal{O}(n)$, не используя алгоритм Фарах-Колтона–Бендера.

14. Рассмотрим классический вариант Heavy-Light Decomposition, где на каждом из вертикальных путей декомпозиции построено дерево отрезков, причем запрос в дереве отрезков на отрезке $[l, r]$ выполняется за $\mathcal{O}\left(\log(r-l)\right)$ (к примеру, такая асимптотика работы получается при использовании дерева отрезков «снизу»). Постройте дерево, для которого найдутся две такие вершины u и v, что для ответа на запрос на пути от u до v потребуется $\mathcal{O}(\log^2 n)$ действий.

15. Рассмотрим другой вариант Heavy-Light Decomposition: вместо того, чтобы направлять путь в самого тяжелого сына по размеру поддерева, направим путь в самого глубокого сына. Сколько в таком случае может произойти смен путей от одной вершины до другой? Приведите пример, на котором эта асимптотика достигается.

16. Дано дерево. Пусть d_v — количество различных размеров поддеревьев среди сыновей вершины v, а $S = \sum_v d_v^2$. Какое наибольшее значение может принимать величина S в дереве из n вершин?

17. Дан граф из n вершин. Постройте структуру данных, позволяющую в offline за время $\mathcal{O}\left((n+m)\log n\right)$ выполнить m операций вида

    (a) добавить ребро в граф

    (b) удалить ребро из графа

    (c) проверить, является ли граф двудольным

18. Даны два дерева. Найдите число пар индексов (i, j) таких, что вершина с номером i является предком вершины с номером j в обоих деревьях, за $\mathcal{O}(n \log n)$.

19. Даны n точек на окружности. Выберете k из них, чтобы минимальное из расстояний между соседними точками было максимально, за время $\mathcal{O}(n \log C)$, где C — максимальное значение координаты точки.

20. Найти в графе гамильтонов путь/цикл за $\mathcal{O}(2^n \log n)$.

21. Дана строка длины n. За одно действие разрешается выбрать любую подстроку,являющуюся палиндромом и вырезать её из строки (оставшиеся символы сдвигаются). Найдите, за какое минимальное количество действий можно уничтожить всю строку за $O(n^3)$.

22. На вашей клавиатуре есть 3 кнопки: 0, 1 и `backspace`. Кнопки 0 и 1 печатают то, что на них написано, а кнопка `backspace` стирает последний напечатанный (если его нет, то не делает ничего). Дана строка длины $m \le n$. Вычислите, сколько способов совершить ровно n нажатий и получить эту строку, за время $\mathcal{O}(n^2)$.

23. Дан набор из n домов на прямой. Вам требуется построить k магазинов таким образом, чтобы сумма расстояний от каждого из домов до ближайшему к нему магазину, была как можно меньше. Найдите решение за $\mathcal{O}(nk \log n)$.