Комплексные числа это кто (who?)

Определение 1. **Комплексным числом** называется формальная запись вида $a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0 + 0i$

Задача 1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что

1. $x + y, x - y, xy \in \mathbb{C}$
2. если $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} \in \mathbb{C}$.

Задача 2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$

Задача 3. Решите уравнение

1. (a) $x^2 - (2i + 2)x + (2i - 1) = 0$
2. (b) $x^3 - 1 = 0$

в комплексных числах.

Определение 2. Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются **сопряжёнными**. Сопряженное к числу z обозначается $\bar{z}$.

Задача 4. Про три комплексных числа известно, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ и $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник на комплексной плоскости.

— — —

Определение 3. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ – с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется модулем (и обозначается $|z|$), φ– аргументом комплексного числа, а сама форма называется тригонометрической записью комплексного числа.

Задача 5.

Докажите, что $|zt| = |z| \cdot |t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.

Задача 6 (Самая важная)**.**

1. Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
2. *(Формула Муавра)* Докажите, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Задача 7. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Задача 8. Вычислите

1. (a) $\sqrt{1+i}$
2. (b) $(1 + \sqrt{3}i)^{2021}$
3. (c) $1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{57}$.

Задача 9 (Вторая по важности)**.** Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями n -ой степени из единицы.

1. Представьте их в тригонометрической форме.
2. Найдите сумму этих чисел.
3. Найдите их произведение.
4. Найдите их сумму квадратов.

Задача 10. Упростите выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$$