

1. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 1337. Два игрока ходят по очереди и зачеркивают числа. За один ход игрок может взять любое еще не зачеркнутое число, после чего он зачеркивает все его делители (включая само число). Кто выигрывает при правильной игре?
2. Постройте структуру данных, которая поддерживает набор прямых и позволяет за $O(\log n)$ обрабатывать два типа запросов:
 - (a) добавить прямую в набор
 - (b) найти площадь выпуклой оболочки точек пересечения всех пар прямых из набора
3. В массиве a длины $n+1$ содержатся целые числа от 1 до n . Найдите число, которое встречается в массиве хотя бы дважды, за $O(n)$ времени и $O(1)$ дополнительной памяти (элементы массива можно изменять).
4. Дано дерево. Пусть d_v — количество различных размеров поддеревьев среди сыновей вершины v . Пусть $S = \sum_v d_v^2$. Какое наибольшее значение (асимптотически) может принимать величина S в дереве из n вершин?
5. Рассмотрим массив $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, элементы которого пронумерованы с 1, в котором содержатся различные числа от 1 до n . Вася повторяет следующую операцию: он рассматривает префикс длины a_1 и разворачивает его. Докажите, что рано или поздно a_1 станет равным 1.
6. Назовем натуральное число *абсолютно простым*, если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Какое максимальное количество различных цифр может быть в десятичной записи абсолютно простого числа?
7. Даны две строки S и T . Найдите количество различных строк, получающихся конкатенацией префикса S и суффикса T , за $O(|S| + |T|)$.
8. В матрице седловой точкой называется такая клетка (i, j) , значение в которой является строгим максимумом в своей строке и в своем столбце. Вычислите количество матриц $n \times m$, состоящих из чисел от 1 до k , в которых есть хотя бы одна седловая точка, где $n, m \leq 500$, $k \leq 10$, по простому модулю $r \leq 10^9 + 9$.
9. Дан массив из n вещественных чисел от 0 до 1. Найдите длину максимального отрезка $0 \leq l \leq r \leq 1$, в котором не содержится ни одного числа, за $O(n)$.
10. Дано целое число $n > 100$. Ваня написал числа $n, n+1, \dots, 2n$ на $n+1$ карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил её на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых — точный квадрат.