

Прямые

Материал из Algoricode wiki

Перейти к: навигация, поиск

Способы задания прямой

1. Нормальным уравнением: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$. В структуре храним (скорее всего в *double*'ах) коэффициенты A, B, C .
2. Двумя точками. Храним, внезапно, эти 2 точки.
3. Точкой и направляющим вектором (любых из них).
4. Точкой и нормальным вектором (любым из них).

Важные переходы между способами хранения

- 2 $\rightarrow$ 1: достаточно найти любое решение системы из 2 уравнений и 3 неизвестных
- 1 $\rightarrow$ 3: если прямая задаётся как в пункте 1, то вектор $(-B; A)$ — направляющий к прямой (важно помнить, что у прямой есть 2 "направления").
- 1 $\rightarrow$ 4: если прямая задаётся как в пункте 1, то вектор $(A; B)$ — нормальный к прямой (важно помнить, что у прямой есть 2 "направления нормали").
- 4, 3 $\rightarrow$ 1: нужно решить систему из 1 уравнения и 1 неизвестного, коль скоро из предыдущих пунктов мы уже знаем подходящие A и B .

Пересечение прямых

Прямые могут:

1. Совпадать
2. Быть параллельными, но не совпадать
3. Пересекаться в одной точке

Научимся отличать эти случаи. Рассуждения ниже приведены для прямых, заданных нормальными уравнениями $A_i x + B_i y + C_i, i \in 1, 2$. Провести аналогичные рассуждения в случае других способ задания прямых автор оставляет в качестве упражнения читателю.

- Прямые параллельны $\iff$ их нормальные векторы параллельны $\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Проблема этого равенства в том, что оно неопределено в случае, если $A_2 = 0$ или $B_2 = 0$. Перепишем: $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$.

- Прямые совпадают $\iff$ их нормальные уравнения пропорциональны $\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, или, с учётом возможных нулей в знаменателях:

$$\underbrace{A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1}_{\text{нормальные векторы параллельны}} \wedge B_1 \cdot C_2 = B_2 \cdot C_1 \wedge A_1 \cdot C_2 = A_2 \cdot C_1. \text{ Здесь важно проверять}$$

нормальные векторы параллельны

все три равенства, потому что, например, первых двух недостаточно в случае, когда $B_1 = B_2 = 0$.

- Прямые пересекаются в одной точке $\iff$ они не параллельны, проверять это мы научились в пунктах выше.

Теперь, если нам нужно найти точку пересечения прямых, нам достаточно найти решение системы из 2 уравнений и 2 неизвестных.

Код пересечения прямых:

```
// эта функция находит точку пересечения в случае, если мы знаем, что она ровно одна
pt LineIntersectionPoint(line& L1, line& L2) {
    // здесь должен быть ваш код, решающий систему уравнений
}

bool AreParallel(line& L1, line& L2) {
    return (L1.a * L2.b == L1.b * L2.a);
}

// # точек пересечения + какая-нибудь точка пересечения
pair<int, pt> LineIntersection (line& L1, line& L2) {
    if (AreParallel(L1, L2)) {
        if (L1 == L2) {
            return {3, {L1.GetAnyPoint()}};
        } else {
            return {0, {}};
        }
    }

    return {1, LineIntersectionPoint(L1, L2)};
}
```

Лежат ли точки по разную сторону от прямой?

(в этом разделе мы всё ещё задаём прямую с помощью 2 точек)

Чтобы проверить, лежат ли точки P_1, P_2 по разные стороны от прямой, заданной точками A, B , достаточно проверить, что повороты от $\overline{AB}$ к $\overline{AP_i}$ разного знака. В этом нам поможет векторное произведение.

```
int sgn(long long a) {
    if (a < 0) {
        return -1;
    } else if (a > 0) {
        return 1;
    } else {
        return 0; // нам это не понадобится, но для полноты напомним
    }
}

// эта функция предполагает, что точки не лежат на прямой
bool IsPointsAtDifferentSemiplanes(line& l1, pt& P1, pt& P2) {
    pt A = l1.pts[0];
    pt B = l1.pts[1];

    return sgn(AB % AP1) != sgn(AB % AP2);
}
```

Расстояние от точки до прямой

Если прямая задана 2 точками

$$\rho(P, L(A, B)) = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{PB}|}{|\vec{AB}|}$$

Примечание: в числителе стоит косое произведение векторов, оно же dot product.

Если прямая задана нормальным уравнением

$$\rho((x_0, y_0), L_{Ax+By+C=0}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Проекция точки на прямую

Чтобы спроецировать точку P на прямую L , достаточно прибавить к ней нормальный вектор прямой, приведённый к длине $\rho(P, L)$ и направленный от точки к прямой. Поскольку нормальный вектор может быть направлен в двух разных (но противоположных друг другу!) направлениях, то достаточно попробовать оба варианта, и принять тот, в котором расстояние от получившейся точки до прямой будет меньше.

Автор конспекта: Александр Гришутин

По всем вопросам пишите в telegram @rationalex (<https://t.me/rationalex>)

Источник — <https://wiki.algocode.ru/index.php?title=Прямые&oldid=1585> (<https://wiki.algocode.ru/index.php?title=Прямые&oldid=1585>)