

Лекция #1: Дерево Фенвика

1 августа

1.1 Прибавление в точке

```
1 void add(int i, int x) {  
2     for (; i < a.size(); i |= i + 1) {  
3         a[i] += x;  
4     }  
5 }
```

- Приведённый выше код перебирает все отрезки, содержащие изначальное i

Обозначим изначальное i как i_0 . Обозначим левый конец отрезка, заканчивающийся в i , как $left(i) = i \& (i + 1)$. Обозначим правый конец отрезка, к которому мы переходим, как $next(i) = i | (i + 1)$. Заметим, что $i < next(i)$ и $left(i) \geq left(next(i))$, значит при переходе к очередному отрезку его правая граница возрастает, а левая не возрастает, т.е. все пройденные отрезки содержат i_0 .

Докажем, что при переходе от i к $next(i)$ не существует такого j , что $j > i$, $j < next(i)$, $left(j) \leq i_0$, то есть что при переходе мы не пропустим никакую правую границу отрезка, содержащего i_0 . Предположим от противного, что такое j существует. Обозначим количество единиц, на которые заканчивается двоичная запись произвольного числа a , как $cto(a)$.

- Пусть $cto(j) \leq cto(i)$. Тогда $left(j) > i \geq i_0$, то есть такой отрезок содержит i_0 .
- Пусть $cto(i) < cto(j) < cto(next(i))$. Так как $j > i$, то это возможно только когда $j > next(i)$, т.е. такое j нам не подходит.
- Пусть $cto(next(i)) = cto(j)$. $next(i)$ – наименьшее число с таким cto , то есть $j \geq next(i)$.
- Пусть $cto(next(i)) < cto(j)$. Так как $j > i$, то это возможно только когда $j > next(i)$.

Таким образом мы перебираем все отрезки, которые содержат i_0 , и только их.