# Теоретический минимум по геометрии

Кучеренко Демид

Июль 2021

## 1 Полярный угол точки

Функция $atan2(sin\alpha, cos\alpha)$ возвращает угол $\alpha$ в радианах из промежутка $(-\pi; \pi)$. Посмотрим на вектор $\overrightarrow{a}$ с концом в нашей точке $(x, y)$ — заметим что $y = sin\alpha \cdot |\overrightarrow{a}|$, а $x = cos\alpha \cdot |\overrightarrow{a}|$.

Мы знаем, что угол можно получить, если передать в $atan2$ синус и косинус, умноженные на некоторое число $k$. Тогда полярный угол точки можно вычислить, вызвав функцию $atan2(y, x)$.

## 2 Вектора

Точки и вектора на плоскости задаются парой координат $(a_x, a_y)$.

Расстояние от начала координат до точки $P(x, y)$ легко находится по теореме Пифагора и равно $\sqrt{x^2 + y^2}$

Аналогично находится и длина вектора: $|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Расстояние между двумя точками $A_0\,(x_0, y_0)$ и $A_1\,(x_1, y_1)$ вычисляется, как длина вектора $\overline{A_0A_1}: \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

При сложении двух векторов $\overline{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y)$ и $\overline{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y)$ получается вектор, $\overline{\mathbf{c}}$, каждая координата которого равна сумме соответствующих координат слагаемых $\overline{\mathbf{c}}(a_x + b_x, a_y + b_y)$.

Нормализованным (нормированным) вектором называется вектор единичной длины, сонаправленный данному. Его координаты равны $(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|})$.

Чтобы получить вектор длины $d$, сонаправленный нашему, домножим нормированный вектор на $d$, его координаты равны $(\frac{da_x}{|a|}, \frac{da_y}{|a|})$.

Вектор, полученный путем поворота вектора $\overrightarrow{a}$ на $90°$ против часовой стрелки имеет координаты $(-y, x)$ (скалярное произведение равно нулю, векторное положительно).

Вектор, полученный путем поворота вектора $\overrightarrow{a}$ на $90°$ по часовой стрелке имеет координаты $(y, -x)$ (скалярное произведение равно нулю, векторное положительно).

## 3 Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y)$ и $\overline{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y)$ определяется как $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi$— угол между ними.

Выражение скалярного произведения через координаты: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y$.

Легко видеть, что скалярное произведение линейно по каждому аргументу: $(k\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) = k(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}})$ Аналогичные утверждение верны и для второго аргумента. Поскольку косинус - четная функция, то скалярное произведение коммутативно: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$.

Скалярное произведение необходимо использовать, когда нужно проверить два вектора (два отрезка, две прямые) на перпендикулярность, поскольку $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = 0$ тогда и только тогда, когда ненулевые вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами - острый, и отрицательно, если тупой.

## 4 Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов будем называть скалярную величину, равную $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$ В данном случае $\varphi-$ ориентированный угол поворота вектора $\overline{\mathbf{a}}$ в сторону вектора $\overline{\mathbf{b}}$ (в реальности это длина вектора векторного произведения в пространстве).

В координатной форме $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = a_x b_y - a_y b_x$

Если поворот производится по часовой стрелке, то векторное произведение отрицательно, а если против часовой стрелки - то положительно. Векторное произведение линейно по каждому аргументу и антикоммутативно: $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}]$.

Векторное произведение удобно использовать для проверки коллинеарности векторов (прямых, отрезков), поскольку оно равно нулю тогда, и только тогда, когда два вектора коллинеарны.

Если векторное произведение $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ положительно, то вектор $\overline{\mathbf{b}}$ получается из вектора $\overline{\mathbf{a}}$ вращением в положительном направлении (против часовой стрелки), если отрицательно - вращением в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Также легко видеть, что векторное произведение можно использовать для вычисления площади треугольника:

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]|$$

(можно взять и другие два вектора, составляющие стороны треугольника).

## 5 Угол между векторами

Пусть даны вектора $\overline{\mathbf{a}}\,(a_x, a_y)$ и $\overline{\mathbf{b}}\,(b_x, b_y)$ . Необходимо вычислить угол между ними. Удобно воспользоваться функцией языка программирования atan2, которая по двум числам $sin\alpha \cdot k$ и $cos\alpha \cdot k$ возвращает угол $\alpha$. Поэтому для нахождения угла между векторами достаточно положить $k = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}|$ и вызвать $\operatorname{atan} 2([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}))$.

## 6 Принадлежность точки промежутку

Для того, чтобы проверить принадлежность точки $C$ прямой, содержащей точки $A$ и $B$, необходимо и достаточно проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ на равенство нулю, то есть должно выполняться условие $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$.

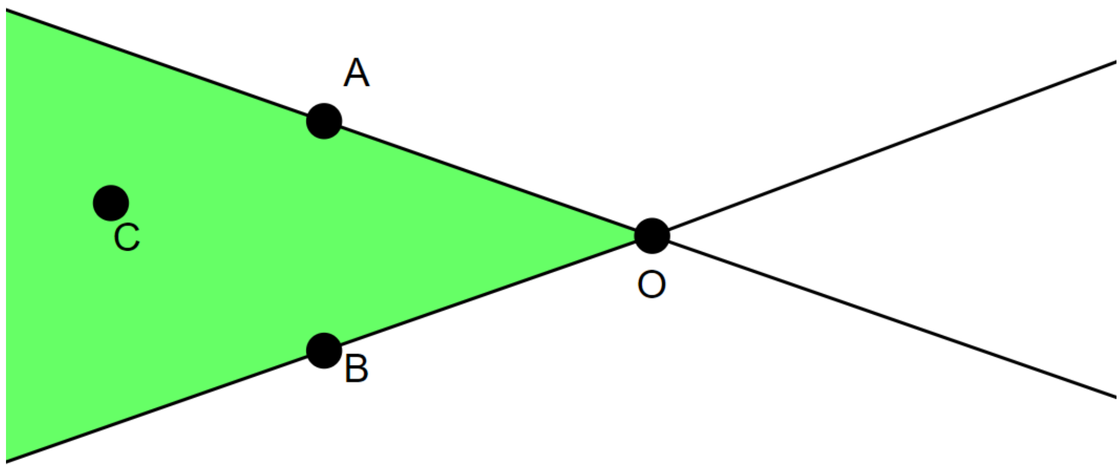
Чтобы точка $C$ принадлежала лучу $AB$, нужно чтобы она принадлежала прямой $AB$, и при этом вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ были сонаправлены. Для сонаправленности необходимо, чтобы скалярное произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

была равно произведению длин векторов, или просто $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \geq 0$ (ведь точка $C$ принадлежит прямой $AB$).

Чтобы точка $C$ принадлежала отрезку $AB$, она должна принадлежать одновременно и лучу $AB$, и лучу $BA$ (пересечением этих двух лучей является отрезок $AB$). Таким образом, добавляется требование, что $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \geq 0$.

## 7 Принадлежность точки углу

Нам нужно определить принадлежность точки зелёной области.




Заметим, что точки $C$ и $B$ должны лежать по одну сторону от вектора $\overrightarrow{OA}$. Это необходимое, но недостаточное условие, потому что задаёт всю левую относительно вектора $\overrightarrow{OA}$ полуплоскость.

Аналогично, точки $C$ и $A$ должны лежать по одну сторону от вектора $\overrightarrow{OB}$. Это задаёт другую полуплоскость, а наш угол является пересечением этих полуплоскостей.

Чтобы проверить, что две точки $C$ и $B$ лежат по одну сторону от вектора $\overrightarrow{OA}$, нужно проверить, что знаки векторных произведений $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}]$ и $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ равны.

## 8 Проверка пересечения лучей

Рассмотрим случай, когда лучи не лежат на одной прямой. Тогда луч $CD$ должен пересекать прямую $AB$, и наоборот, луч $AB$ должен пересекать прямую $CD$.

Луч $CD$ пересекает прямую $AB$, когда он начинается с одной стороны относительно прямой, и направлен в сторону другой стороны относительно прямой. То есть, векторные произведения $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$ и $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}]$ должны быть разного знака.

Если лучи лежат на одной прямой, то они пересекаются, если сонаправлены (скалярное произведение больше нуля), либо если конец одного принадлежит другому.

# 9 Проверка пересечения отрезков

Рассмотрим случай, когда отрезки не лежат на одной прямой. Два отрезка $AB$ и $CD$ пересекаются, если прямая $AB$ пересекает отрезок $CD$, и наоборот, прямая $CD$ пересекает отрезок $AB$.

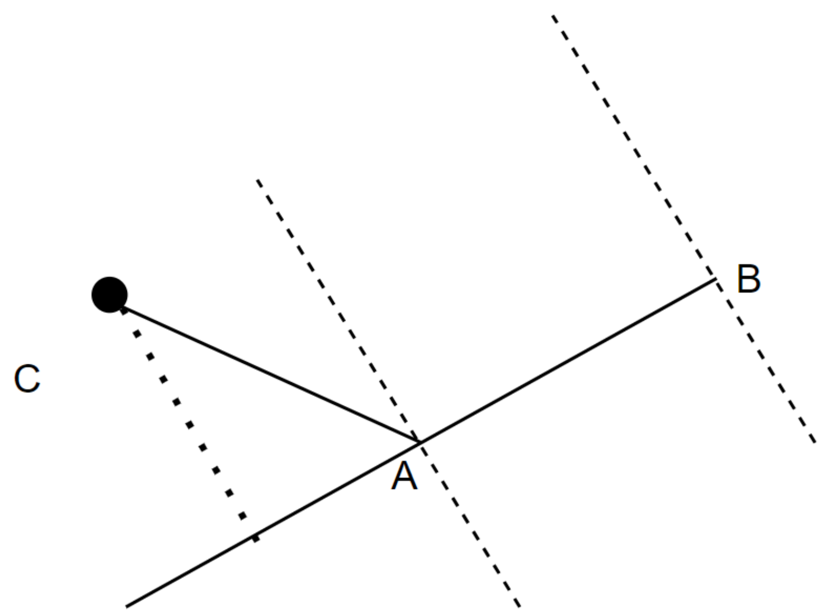
Прямая $AB$ пересекает отрезок $CD$, если точки отрезка лежат по разные стороны относительно прямой (или на ней). То есть, $sign([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]) \cdot sign([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]) \leq 0$.

Если отрезки лежат на одной прямой, то можно проверить, что пересечение проекций этих отрезков на оси не пусты. Например левая граница пересечения проекций на ось $Ox$ равна максимальному иксу левых границ отрезков, а правая граница минимальному иксу правых границ отрезков.

# 10 Расстояния от точки

Найдем расстояние от точки $C$ до прямой $AB$. $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2}h_{AC}|AC|$. Тогда $h_{AC} = \frac{|[\overline{AB}, \overline{AC}]|}{|AC|}$. Это и есть искомое расстояние.

Чтобы найти расстояние от точки до луча, нужно посмотреть, куда опускается перпендикуляр из точки $C$ на прямую $AB$. Если он попадает на луч, то расстояние — длина перпендикуляра, то есть расстояние до прямой $AB$. Если перпендикуляр не попадает на луч, то расстояние от точки до луча, это расстояние от точки до вершины луча $A$. Проверить, куда падает проекция из точки $C$ очень просто — нужно посмотреть на угол $\angle BAC$, если он тупой, то проекция не попадает на луч. Угол $\angle BAC$ тупой, если $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 0$.




Чтобы найти расстояние от точки, нужно посмотреть на то, попадает ли проекция точки $C$ на отрезок. Если попадет, то взять расстояние от точки до прямой, а иначе взять кратчайшее расстояние до одного из концов отрезка. Проекция попадает на отрезок, если углы $\angle BAC$ и $\angle ABC$ острые.

## 11 Расстояние между отрезками

Если отрезки не пересекаются, то кратчайшим расстоянием между отрезками является расстояние между концом одного из отрезков и другим отрезком (для доказательства нужно сдвинуть одну из точек, в которых достигается кратчайшее расстояние, в сторону одного из концов отрезка, и оно не увеличится). Тогда проверим расстояния от каждой из четырех точек до другого отрезка, наименьшее расстояние будет ответом.

Если отрезки пересекаются, то расстояние равно нолю.

## 12 Уравнений прямой

Нормальное (общее) уравнение прямой имеет вид $Ax+By+C=0$. Пусть есть две точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Точка $(x,y)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда векторное произведение $[AC,AB]=0$. $[AC,AB]=(x-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y-y_2x_1+y_1x_1+x_2y_1-y_1x_1=(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-y_2x_1=0$.

Отсюда $A=(y_2-y_1), B=(x_1-x_2), C=x_2y_1-y_2x_1$.

Поскольку $Ax_1+By_1+c=0, Ax_2+By_2+C=0$, то $a\,(x_1-x_2)+b\,(y_1-y_2)=0$ Последнее равенство означает, что вектор $\overline{\mathbf{n}}(A,B)$ ортогонален вектору $(x_1-x_2,y_1-y_2)$, то есть вектор $\underline{\mathbf{n}}$ ортогонален нашей прямой. Такой вектор называется нормалью или вектором нормали.

## 13 Прямая, параллельная данной

Пусть дана прямая $ax+by+c=0$. Если изменять значение коэффициента $c$, зафиксировав при этом значения $a$ и $b$, то мы получим семейство параллельных прямых. Как получить из этого семейства прямую, параллельную исходной и удаленной от нее на заданное расстояние $d$?

Вектор нормали к этой прямой будет иметь вид $(a,b)$. Длина этого вектора $\sqrt{a^2+b^2}$. Поделив вектор на его длину, получим вектор $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ единичной длины. Умножив его на $d$, получим вектор $\left(\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Этот вектор будет нормальным к исходной прямой и его длина равна $d$. Искомая прямая получается из исходной сдвигом на этот вектор.

Таким образом, если точка $(x,y)$ принадлежала исходной прямой, то точка $(x',y')$, где $x'=x+\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y'=y+\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$ принадлежит искомой прямой. Запишем уравнение $ax+by+c=0$ и подставим в него $x=x'-\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=y'-\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$, получим уравнение:

$$ax'-\frac{a^2d}{\sqrt{a^2+b^2}}+by'-\frac{b^2d}{\sqrt{a^2+b^2}}+c=0$$

или

$$ax'+by'+c-d\sqrt{a^2+b^2}=0$$

Уравнение второй прямой, удаленной на расстояние $d$ от исходной, но в направлении, противоположном нормали, имеет вид:

$$ax'+by'+c+d\sqrt{a^2+b^2}=0.$$

## 14 Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая $ax+by+c=0$ и точка $(x_0,y_0)$. Найдем расстояние от этой точки до прямой. Пусть искомая точка удалена на расстояние $d$ от данной прямой (будем считать, что $d$ может быть отрицательной величиной). Тогда прямая $ax + by + c - d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$ проходит через точку $(x_0, y_0)$, откуда

$$ax_0 + by_0 + c - d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

Преобразовав, получаем:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

В этой формуле величина $d$ может быть отрицательной, поэтому расстояние от точки до прямой равно $|d|$.

## 15 Отражение точки относительно прямой

Найдем расстояние от точки до прямой, пусть оно равно $d$. Возьмем вектор нормали $\overrightarrow{n}$ к нашей прямой. Сделаем так, чтобы он стал длины $2d$ и отложим его от нашей точки. Этот вектор имеет координаты $(\frac{2dA}{A^2+B^2}, \frac{2dB}{A^2+B^2})$. Получается точка $(x_0 + \frac{2dA}{A^2+B^2}, y_0 + \frac{2dB}{A^2+B^2})$.

Однако, это точка могла оказаться с той же стороны от прямой, и находиться на расстоянии $3d$ (если вектор нормали смотрит в сторону, с которой находится точка $(x_0, y_0)$. Прежде чем откладывать проверим, что вектор нормали смотрим в противоположную сторону, и если это не так, домножим вектор на $-1$.

Чтобы проверить, смотрит ли вектор нормали в сторону точки, можно провести вектор в нашу точку из произвольной точки, и посмотреть на знак скалярного произведения вектора нормали и этого вектора. Если скалярное произведение больше ноля, то угол острый, и они находятся по одну сторону от прямой.

Еще можно отложить вектор нормали, проверить что точки (исходная и полученная) лежат по разные стороны от прямой, и, если это не так, отложить вектор в другую сторону.

## 16 Пересечение прямых

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Они параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Иначе они пересекаются и имеют одну общую точку.

Чтобы найти расстояние между параллельным прямыми, достаточно взять произвольную точку на одной прямой (например, с $x = 0$) и найти расстояние до другой.

Найдем точку пересечения пересекающихся прямых.

Рассмотрим решение системы из 2 линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на $B2$, второе $-$ на $B1$, получим:

$$\begin{cases} A_1B_2x + B_1B_2y + C_1B_2 = 0 \\ A_2B_1x + B_2B_1y + C_2B_1 = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0$$

откуда

$$x = \frac{C_2B_1 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Домножим первое уравнение на $A2$, второе на $A1$, вычтем из второго уравнения первое:

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y + (C_1A_2 - C_2A_1) = 0$$

откуда

$$y = \frac{C_2A_1 - C_1A_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

## 17 Пересечение двух отрезков

Сначала определим, какую форму имеет пересечение двух отрезков. Пересечение бывает пустым множеством, точкой или отрезком.

Если два отрезка лежат на одной прямой (проверяется векторным произведением), то пересечение либо отрезок (возможно, вырожденный в точку), либо пустое множество. Найти отрезок пересечения можно через пересечение проекций на оси, описанное в пункте пересечение отрезков.

Если отрезки не лежат на одной прямой, то их пересечение либо одна точка, либо пустое множество. Проверим, что отрезки пересекаются, и если это так, то найдем точку пересечения прямых, содержащих эти отрезки.