

1. Вам дано $n \leq 50$ целых чисел a_i от 0 до 100. Посчитайте точное значение интеграла

$$\frac{2^{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(a_1 x) \cos(a_2 x) \dots \cos(a_n x) dx$$

2. Алиса и Боб играют в игру с $n \leq 10^5$ кучками с камнями (размеры кучек до 10^9). За ход можно либо забрать все камни из самой большой кучки, либо забрать по одному камню из всех непустых кучек. Проигрывает тот, кто не может сходить.
3. На столе лежит бесконечное число карт рубашкой вверх или вниз. Изначально есть $n \leq 500$ карт на позициях $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 10^6$, лежащих рубашкой вверх, остальные лежат рубашкой вниз. Можно взять простое число $p \geq 3$, взять любые p подряд карт и перевернуть. Нужно перевернуть все рубашкой вниз за минимальное число действий.
4. Если таблица $n \times m$ ($n, m \leq 50$) и для каждой клетки определены числа a_{ij} и b_{ij} . Расставьте в клетках таблицы числа t_{ij} так, чтобы для каждой клетки (i, j) было выполнено следующее условие: $t_{kl} + a_{ij} \leq t_{ij} \leq t_{kl} + b_{ij}$ для всех клеток (k, l) , соседних с (i, j) по вертикали или горизонтали.
5. Дан полный неориентированный граф, где вес ребра (u, v) равен $|u - v| \cdot D + A_u + A_v$. Число вершин не превосходит $2 \cdot 10^5$. Найдите MST в этом графе.
6. Есть массив чисел размера $n \leq 3000$, и $q \leq 3000$ запросов. Запросы исполняются по очереди: на i -м запросе можно либо поменять местами элементы на позициях x_i и y_i , либо ничего не делать. Существует 2^q способов исполнить запросы. Найдите суммарное количество инверсий в финальном массиве по всем возможным сценариям исполнения (по модулю $10^9 + 7$).
7. Есть дерево с $n \leq 2 \cdot 10^5$ вершинами, изначально в каждой вершине лежит по монетке. Два игрока играют в игру. Ход состоит в следующем:
- Игрок выбирает вершину, в которой есть хоть одна монетка
 - Из этой вершины все монетки выбрасываются
 - Все монетки во всех остальных вершинах передвигаются по инцидентному ребру в сторону выбранной вершины

Тот игрок, который не может сделать ход (потому что все монетки закончились), проигрывает. Определите победителя.

8. Алиса и Боб играют в морской бой на доске $n \times m$ ($n, m \leq 200$). По их правилам кораблём является горизонтальная или вертикальная полоска любой длины, при этом корабли должны быть расставлены на поле так, чтобы никакие два не касались сторонами или углами. Боб уже спросил у Алисы по некоторым клеткам, являются ли они частью какого-то корабля, и получил отрицательный ответ. Помогите ему посчитать, какое наибольшее количество клеток могут занимать корабли Алисы.