Нижние оценки.

Утверждение. Не существует алгоритма сортировки, использующего только сравнение и работающего за $o(n \log n)$.

Определение. (Классы P и NP)
Будем говорить, что задача принадлежит классу P, если существует полиномиальный алгоритм для её решения.
Будем говорить, что задача принадлежит классу NP, если существует такой алгоритм M, что для всех yes-входов x и только для них найдётся такая подсказка y, что $M(x, y) = 1$.

Задача. (k-SAT)
Дана формула в КНФ на n логических переменных и m клозах, такая что размер каждого клоза не больше k. Проверить, существует ли означивание переменных, выполняющее формулу.

Гипотеза. (P $\neq$ NP)
3-SAT $\notin$ P (3-SAT не решается за полиномиальное время).

Гипотеза. (ETH)
3-SAT не решается за время $2^{o(n+m)}$.

Задача. (Independent Set)
Дан граф G на n вершинах и m рёбрах и число k. Проверить, существует ли в нём независимое множество (множество попарно несмежных вершин) размера k.

Утверждение. Под ETH не существует алгоритма для Independent Set, работающего за время $2^{o(n+m)}$.

Гипотеза. (SETH)
Для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $k > 0$, такое что k-SAT не решается за время $(2 - \varepsilon)^n$.

Задача. (k-SUM)
Дано k массивов $A_1, \ldots, A_k$ длины n, состоящие из целых чисел. Существуют ли индексы $j_1, \ldots j_k$ такие что: $\sum\limits_{i=1}^{k} A_{i,j_i} = 0$.

Гипотеза. (3-SUM-conjecture)
3-SUM не решается за $\mathcal{O}(n^{2-\varepsilon})$.

Задача. (APSP)
Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах. Требуется найти длины кратчайших путей между всеми парами вершин.

Гипотеза. (APSP-conjecture)
APSP не решается за $\mathcal{O}(n^{3-\varepsilon})$.

Задачи.

Упражнение 1. Докажите, что используя только сравнения на меньше/больше невозможно построить выпуклую оболочку n точек за $o(n \log n)$.

Упражнение 2. Сведите search-версию задачи к decision-версии. Сведение должно быть полиномиально:

(a) Hamiltonian Path
(b) 3-Coloring
(c) Max-SAT (выполнить максимальное число клозов)

Задача. (Vertex Cover)
Дан граф G на n вершинах и m рёбрах и число k. Проверить, существует ли в нём вершинное покрытие (множество вершин, такое что для каждого ребра хотя бы один его конец лежит в этом множестве) размера k.

Упражнение 3. Покажите, что Vertex Cover не решается за $2^{o(n+m)}$ под ETH.

Задача. (Clique)
Дан граф G на n вершинах и m рёбрах и число k. Проверить, существует ли в нём полный граф (множество попарно смежных вершин) размера k.

Упражнение 4. Какую нижнюю оценку на Clique можно получить под ETH?

Задача. (Exact Set Cover)
Дано множество из n элементов $\mathcal{U}$ и набор из m его подмножеств $\mathcal{S} = S_1, S_2, \ldots, S_m$. Проверьте, существует ли подмножество множеств из $\mathcal{S}$, содержащее каждый элемент из $\mathcal{U}$ ровно один раз.

Задача. (Subset Sum)
Даны n предметов с весами, проверить, существует ли набор предметов с суммарным весом ровно W.

Задача. (0-1 Integer Programming)
Дана целочисленная матрица A размера $n \times m$ и целочисленная матрица b размера $m \times 1$. Проверить, существует ли такая матрица x, состоящая из 0 и 1, такая, что $Ax \leqslant b$.

Упражнение 5. Докажите NP-полноту задач:

(a) Exact Set Cover
(b) Subset Sum (подумайте, что здесь является размером входа)
(c) 0-1 Integer Programming

Задача. (Orthogonal Vectors) Дано 2 набора A и B из n векторов из d нулей и единиц, где $d = o(n)$. Проверить, существуют ли $a \in A, b \in B$, такие что: $\sum_{i=1}^{d} a_i b_i = 0$.

Упражнение 6. Докажите, что Orthogonal Vectors не решается за $n^{2-\varepsilon}$ под SETH.

Задача. (1-in-3-SAT)
Дана формула в КНФ на n логических переменных и m клозах, такая что размер каждого клоза не больше k. Проверить, существует ли означивание переменных, выполняющее формулу, такое что каждый клоз выполняется ровно одной переменной.

Упражнение 7. Постройте сведение SAT $\to$ 1-in-3-SAT

Упражнение 8. Покажите, что k-SUM не решается за $n^{o(k)}$ под ETH.
Подсказка: используйте предыдущую задачу