Начальная геометрия

Август 15, 2022

1 Направленные отрезки и векторы

Направленный отрезок *- это отрезок заданный своими точками начала и конца.*

Например, отрезок AB, где точка $A(2, 5)$ - начало, а точка $B(3, 7)$ - конец, называется направленным.

Вектор *- это множество направленных отрезков.*
Принято рассматривать некоторые отрезки не по отдельности, а как классы с совпадающими векторными координатами. Таким образом, если разность координат точек совпадает, по всем осям, то два направленных отрезка задают один и тот же вектор.

Например, два направленных отрезка с началами в $A(0, 0)$ и $C(1, 0)$, с соответствующими концами в $B(2, 1)$ и $D(3, 1)$, образуют пару **разных** направленных отрезков AB и CD, но пару **одинаковых** векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, с координатами $(2, 1)$.

2 Операции над векторами

2.1 Операции с векторами и числами

Рассмотрим допустимые операции между числами и векторами (пусть у нас будут вектора $v = (v_1, v_2)$ и $w = (w_1, w_2)$):

1. $k \cdot \overrightarrow{v} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$, где $k \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{\overrightarrow{v}}{k} = (\frac{v_1}{k}, \frac{v_2}{k})$, где $k \in \mathbb{R}$.
3. $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$.
4. $v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$.

Так же следует выделить ***номирование***, данная операция делит вектор $\overrightarrow{v}$ на его длину: $\overrightarrow{v}_{normalized} = \frac{\overrightarrow{v}}{|v|}$.

3 Скалярное произведение

3.0.1 Определение

В общем случае, при работе с многомерными пространствами определение термина ***угол*** вызывает затруднения. Так как сложно представить даже сами пространства, не говоря уже об объектах, напрямую зависящих от интерпретации этих пространств. Поэтому математики задались вопросом, как формализовать определение угла для многомерного случая, так и повилось скалярное произведение.

Скалярное произведение *- это операция над двумя векторами, результат которой равен сумме попарных произведений координат.*

Например, Пусть даны вектора $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ и $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Тогда их *скалярное произведение* равно $(v, w) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i = v_1 \cdot w_1 + + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n$

Однако, вернёмся к вопросу о том, как же через *скалярное произведение* математики определили угол. Всё стало достаточно понятно после того, как они доказали следующее, для дву- и трёхмерных пространств верно, что $(v, w) = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha_{vw}$, где α - угол между двумя векторами v и w. Откуда, $\cos\alpha_{vw} = \frac{(v,w)}{|v|\cdot|w|}$

Таким образом, зная косинус угла между векторами, несложно найти и сам угол.

Следует также отметить, что $|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{|v| \cdot |v| \cdot \cos\alpha_v}$ (так как вектор v совпадает сам с собой, то принято считать, что $\alpha_v = 0$). И для нулевого вектора его угол с другими векторами не определён.

Theorem 1. *Доказать равенство* $(v, w) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha_{vw}$ *для случая двумерного пространства.*

Доказательство. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$ и $\overrightarrow{w} = (w_x, w_y)$. Отложим их от произвольной общей точки плоскости O, как направленные отрезки (как видим док-во не привязано к положению направленных отрезков, а значит корректно для векторов). И отметим точки-концы отрезков, обозначим их соответственно V и W. Получился $\triangle OVW$, тогда
по **теореме Косинусов**:

$$|VW|^2 = |OV|^2 + |OW|^2 - 2 \cdot |OV| \cdot |OW| \cdot \cos\alpha_{vw} \tag{1}$$

Что аналогично,

$$|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{w}|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \cdot \cos\alpha_{vw} \tag{2}$$

По определению через модули и угол, можем заменить последнее слагаемое:

$$|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{w}|^2 - 2 \cdot (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \tag{3}$$

Теперь сделаем перенос и выразим всё, кроме скалярного произведения через координаты.

$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2} \cdot ((v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) - ((w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2)) = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot v_1 \cdot w_1 + 2 \cdot v_2 \cdot w_2) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 \tag{5}$$

Что и требовалось доказать.

3.0.2 О свойствах скалярного произведения

Следует отметить, что из зависимости скалярного произведения от cos следует, что если есть два вектора $v = (v_1, v_2)$ И $w = (w_1, w_2)$:

1. $(v, w) < 0$, то наименьший угол между v и w *тупой*
2. $(v, w) = 0$, то наименьший угол между v и w *прямой*
3. $(v, w) > 0$, то наименьший угол между v и w *острый*
4. $(k \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = k \cdot (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
5. $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$
6. $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$

□

4 Псевдоскалярное (но много кто называет его векторным, но это не так) произведение

4.1 Определение

Изначально имеется определение *векторного произведения*, результат которого от двух векторов, это тоже вектор. Однако для нас это пока сложное понятие и так как мы рассматриваем только случай плоскости, то можно упростить операцию и возвращать только одно действительное число.

Пусть есть $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$, тогда ***псевдоскалярным произведением*** *назовём операцию $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = |v| \cdot |w| \cdot \sin \alpha_{vw}$.*

Theorem 2. *Доказать, эквивалентность определений $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = |v| \cdot |w| \cdot \sin \alpha_{vw}$.*

Доказательство. Проделываем рассуждения отдельно для каждого определения, просто показывается, что численное значение каждого из выражений равно ориентированной площади параллелограмма, натянутого на вектора v и w.

Для определения через sin пользуемся тем фактом, что он делает проекцию на ось Oy, и при рассмотрении приходим к тому, что перемножение даёт нам площадь параллелограмма.

Для координат мы рассматриваем удвоенные площади треугольников (полученные в результате перемножения координат), которые в совокупности и дают ориентированную площадь параллелограмма. $\square$

4.2 О свойствах псевдоскалярного произведения

Так же как и для *скалярного произведения*, укажем некоторые свойства псевдоскалярного произведения векторов v и w:

1. $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] > 0$, тогда и только тогда, когда угол от v до w положительный (то есть идёт ***против часовой стрелки*** от v до w)
2. $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$, тогда и только тогда, когда угол от v до w нулевой или равен π
3. $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] < 0$, тогда и только тогда, когда угол от v до w отрицательный (то есть идёт ***по часовой стрелки*** от первого до второго вектора)
4. $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}]$
5. так же следует отметить то, что $\Big|[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\Big| = 2 \cdot S_{\triangle OVW}$, то есть равен площади параллелограмма
6. $[k \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = k * [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$
7. $[\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$

5 О точности вычислений

Все действия с действительными числами выполняются приближенно. Поэтому два действительных числа никогда нельзя сравнивать на точное равенство. Мы будем считать два числа равными, если они отличаются не больше, чем на некоторое значение ϵ. Определение правильного ϵ — некоторое умение.

Для справки: машинная точность вычислений (машинное эпсилон) равно 1.19209e-07 для действительных чисел одинарной точности и 2.22045e-16 для действительных чисел двойной точности.

Итак, если есть два действительных числа x и y, то мы считаем, что
$x = y$, если $|xy| < \epsilon$,
$x \neq y$, если $|xy| > \epsilon$,
$x < y$, если $x < y - \epsilon$,
$x \leq y$, если $x < y + \epsilon$,
$x > y$, если $x > y + \epsilon$,
$x \geq y$, если $x > y - \epsilon$.

6 Русско-английский словарик

Словарик анти-реджектов, пожалуйста при написании кода используйте слова отсюда:
точка point
вектор vector
прямая line
луч ray
отрезок segment
угол angle
окружность circle
треугольник triangle
прямоугольник rectangle
квадрат square
многоугольник polygon
окружность circle
медиана median
биссектриса bissector
высота altitude
пересечение intersection
длина length
периметр perimeter
площадь area
касательная tangent
скалярное произведение dot product
векторное произведение cross product
вектор нормали normal vector

7 От андрюши, читабельным подчерком;)

Для ЛКШ.2022.Параллель 4
Если увидите опечатки или ошибки, напишите мне, поправим...