

# Паросочетания

10 августа 2022 г.

## Что такое паросочетание? (и другие определения)

Пусть есть  $n$  мальчиков (левая доля графа) и  $m$  девочек (правая доля графа). Для каждого мальчика известны девочки, которые ему нравятся. Тогда **паросочетанием** будет называться набор пар <мальчик, девочка>, что каждый мальчик находится в паре не более чем с одной девочкой, а каждая девочка — не более, чем с одним мальчиком.

**Полным паросочетанием** называется такой набор пар <мальчик, девочка>, что каждому мальчику сопоставлена ровно одна девочка, а каждой девочке — ровно один мальчик.

Вершина называется **насыщенной**, если она лежит в паросочетании.

**Чередующаяся цепь** — путь, в котором соседние рёбра имеют разный «цвет» (то есть для каждого ребра на пути, если оно является ребром паросочетания, его соседи не лежат в паросочетании, и наоборот)

**Дополняющая цепь** — чередующаяся цепь, в которой первое и последнее ребро не лежит в паросочетании.

## Теорема Берга

**Утверждение.** Паросочетание максимально тогда и только тогда, когда не существует дополняющей цепочки в графе.

**Доказательство.**

- Если дополняющая цепь есть, то паросочетание можно увеличить: для удлиняющей цепочки уберем ребра из паросочетания и добавим ребра не из паросочетания.

- Пусть паросочетание не максимально. Зафиксируем какое-то максимальное паросочетание  $M$ . Рассмотрим ребра, которые лежат либо только в нашем паросочетании, либо только в  $M$ . Тогда у каждой вершины степень будет не больше 2-х. В таком случае граф можно разбить на циклы и пути (при чем любые два ребра, имеющие общую вершину будут взяты из разных паросочетаний). Так как размер  $M$  больше размера нашего паросочетания, будет существовать путь, нечётной длины, а значит чередующаяся цепь.

## Лемма Холла

**Утверждение.** Если для любого подмножества  $S$  вершин одной доли размер множества вершин второй доли ( $N(S)$ ), соединенных хотя бы с одной вершиной из  $S$ , не меньше  $|S|$ , то существует полное паросочетание.

**Доказательство.**

- Если есть полное паросочетание, то Лемма Холла выполнена, так как для каждой вершины в  $N(S)$  будет лежать соединенная с ней в паросочетании вершина второй доли.
- Чтобы доказать, что существует полное паросочетание, если выполнено условие Леммы Холла, предположим обратное. Пусть максимальное паросочетание имеет размер  $< N$ . Тогда возьмем вершину не из паросочетания. По Лемме Холла она будет соединена с какой-то вершиной второй доли. Если эта вершина не лежит в рассматриваемом паросочетании, то оно не максимально. Иначе можно рассматривать множество из двух вершин (исходной и пары для вершины, в которую мы провели ребро), для которого по Лемме Холла опять же будет хотя бы одна новая вершина из второй доли. Так как размер паросочетания конечен, в какой-то момент мы найдем дополняющую цепочку.

## Алгоритм Куна

Будем хранить максимальное паросочетание для какого-то префикса вершин. Рассматривая новую вершину, будем пробовать увеличить паросочетание, найдя чередующуюся цепочку из рассматриваемой вершины.

Вершины нет смысла рассматривать дважды: если дополняющей цепочки из новой вершины нет, то паросочетание максимально по теореме Берга. Если же мы увеличили паросочетание, добавив пару новой

вершине, то размер паросочетания увеличился на 1. Если из какой-то вершин префикса появилась удлиняющая цепочка, то размер паросочетания при добавлении новой вершины увеличился хотя бы на 2, но такого быть не может  $\Rightarrow$  мы неправильно нашли максимально паросочетание на префиксе.

$$O(V(V + E))$$

## Оптимизируем Куна

- можно изначально жадно набрать какое-то паросочетание.  $O(M(V + E))$ .
- если мы запустили *dfs* от вершины, но не нашли удлиняющей цепочки, то можно не занулять использованные вершины, так как если раньше ни из одной вершины не была достижима вершина без пары, то и сейчас она не достижима, так как изменений не было.
- можно вместо булевых значений в массиве *used* хранить номер текущей итерации. В этом случае не будет необходимости занулять *used*.  $O(ME)$

## Покрытие DAG'а путями

Давайте раздвоим вершины: вершине  $u$  сопоставим вершины  $u_1, u_2$ . Если в исходном графе есть ребро  $u \rightarrow v$ , то проведем в новом графе ребро  $u_1 \rightarrow v_2$ . Каждому паросочетанию в таком графе будет соответствовать набор путей в исходном графе, а каждому набору путей исходного графа — какое-то паросочетание. Размер паросочетания равен количеству ребер в путях. Несложно заметить, что количество путей равно  $n$  — количество ребер. Поэтому можно максимизировать количество ребер, чтобы минимизировать количество путей. Осталось найти максимальное паросочетание в новом графе.

## Вершинное покрытие

**Вершинное покрытие** — набор вершин, что у каждого ребра хотя бы один конец лежит в этом наборе.

**Утверждение.** В двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия.

Заметим, что хотя бы 1 конец каждого ребра из паросочетания должен лежать в минимальном вершинном покрытии. Поэтому его размер не меньше размера паросочетания.

Для того, чтобы доказать, что размер минимального вершинного покрытия не превосходит размера паросочетания, обойдем граф при помощи *dfs* от всех вершин ненасыщенных паросочетанием. ориентируя ребра паросочетания справа налево, а остальные слева направо. Разобьем вершины на 4 множества:

$L^-$  — множество непосещенных вершин левой доли

$L^+$  — множество посещенных вершин левой доли

$R^-$  — множество непосещенных вершин правой доли

$R^+$  — множество посещенных вершин правой доли

Заметим, что ребер из  $R^-$  в  $L^+$  не бывает, так как такое ребро было бы ребром паросочетания, а значит в конец этого ребра из  $L^+$  можно было бы прийти только из вершины из  $R^-$ .

Из  $L^+$  в  $R^-$  и  $R^+$  в  $L^-$  ребер тоже нет (так как тогда неправильно выбрано  $R^-$  или  $L^-$ ).

В  $R^+$  лежат только вершины паросочетания, так как иначе мы могли бы прийти из ненасыщенной вершины до вершины не из паросочетания, то есть нашли бы удлиняющую цепочку. В  $L^-$  лежат только вершины из паросочетания по построению. Поэтому  $|L^-| + |R^+| \leq |M|$ , а еще это вершинное покрытие, так как нет ребер между  $L^+$  и  $R^-$ .

Таким образом, размер минимального вершинного покрытия совпадает по размеру с максимальным паросочетанием (а еще это  $L^- \cup R^+$ ).

Также стоит отметить, что максимальным независимым множеством будет  $L^- \cup R^+$ , а его размер будет равен  $n - |M|$  (это следует из того, что дополнением к вершинному покрытию является независимое множество, и наоборот).

## Теорема Дилворта. Частично упорядоченное множество.

Рассмотрим *DAG*, в котором выполняется следующее условие:

- Если есть ребра  $u \rightarrow v$  и  $v \rightarrow w$ , то есть и ребро  $u \rightarrow w$ .

**Антицепь.** — независимое множество в таком графе

**Цепь.** — путь в таком графе

**Утверждение.** макс антицепь равна по размеру мин покрытию путями для такого графа.

1) Пусть  $\min$  покрытие путями строго меньше  $\max$  антицепи по размеру. Тогда по принципу Дирихле найдутся две вершину  $u, v$ , из этой антицепи, лежащие в одной цепи. Но тогда между ними есть ребро. Получаем, что  $\min$  размер минимально покрытия путями не меньше размера  $\max$  антицепи.

2) Раздвоим вершины графа, как мы это делали в покрытии путями. Тогда минимальное разбиение на цепи равно по размеру  $n - |M|$ . С другой стороны размер минимального вершинного покрытия хотя бы  $n - |M|$ , так как оно хотя бы  $|L^-| + |R^+| = n - |M|$  для  $L^-$  и  $R^+$  из предыдущего пункта, потому что некоторые вершины могут быть учтены в объединении этих множеств дважды (для вершины и для копии).