Семинар по потокам

В задачах этого листочка используются обозначения: f_e — поток по ребру e; c_e — пропускная способность ребра e. Считаем, что мы умеем искать поток за $O(V^2E)$ и $O(VE\log C)$ при помощи алгоритма Диница. Взвешенные потоки искать не умеем.

1. Есть n тем, у каждой из которых есть полезность c_i, возможно, отрицательная. Для того что бы студенты поняли некоторые темы, необходимо, чтобы были прочитаны так же некоторые другие темы. Однако если существует цикл из зависимостей тем, то их все можно прочитать в любом порядке. Нужно максимизировать полезность выбранных тем. $O(V^2E)$.

2. Дано n элементов, их нужно разбить на два множества. Для каждого элемента дана стоимость поместить его в первое и второе множество, а также для всех пар (i, j) дан штраф c_{ij} за то, что они лежат в разных множествах. Найти минимальную стоимость разбиения всех элементов на два множества.

3. Есть неориентированный граф из n вершин, в i-й вершине a_i солдат, за день солдат может перейти в соседнюю вершину. За какое минимальное количество дней можно получить b_i солдат в каждой вершине? Решить за полиномиальное от n время.

4. Дано n инструментов и m работ. У каждого инструмента есть некоторая стоимость a_i, у каждой работы есть гонорар b_i. Для каждой работы указан список необходимых для её выполнения инструментов, при этом после выполнения работы инструменты не исчезают. Требуется купить некоторые инструменты, после чего выполнить некоторые работы, чтобы в итоге получить максимальный доход. $O(V^2E)$.

5. Дана матрица $n \times m$, каждая клетка изначально покрашена в чёрный или белый цвет. Перекрасить вершину в чёрный стоит B, в белый — W. После того, как вы совершите все необходимые перекрашивания, вы дополнительно заплатите X за каждую пару соседних по стороне клеток различных цветов. Минимизируйте сумму потраченного.

6. В графе за вас нашли максимальный поток. Вам сказали f_e для всех ребер. За $O(V + E)$ найдите его минимальный разрез с наименьшим возможным числом вершин в «левой доле».

7. Есть две перестановки a и b длины n. Вы можете выполнять следующую операцию любое количество раз:

- выбрать $1 \le i \le n$. Пусть $a_x = i, b_y = i$. Вы меняете местами a_i и a_x, а также b_i и b_y.

Вы должны отсортировать обе перестановки в порядке **возрастания** за минимальное количество операций. $1 \le n \le 3000$.

8*. Дан граф. Проверьте, единственнен ли минимальный $s - t$ разрез в нём. $O(V^2E)$.

9*. Дан планарный граф на n вершинах.

1. найдите минимальный разрез. $O(n \log n)$
2. восстановите максимальный поток. $O(n \log n)$

10*. Есть n задач. i-я задача имеет тип $type_i$, решить её можно только в первые d_i дней, а её полезность равна r_i. В один день можно решать не более одной задачи. $1 \le type_i \le 3$. Женя хочет решить w_i задач на i-го типа. Скажите Жене, сможет ли он это сделать, и если сможет, то выведите максимальную суммарную полезность задач, которые он решит. $1 \le n \le 10^5, 1 \le r_i \le 10^9, 0 \le w_i \le n$.

1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	9	10