# Задача A. ZS тасует карты

| | |
|---|---|
| Имя входного файла: | `стандартный ввод` |
| Имя выходного файла: | `стандартный вывод` |
| Ограничение по времени: | 2 секунды |
| Ограничение по памяти: | 512 мегабайт |

У zscoder есть колода из $n+m$ карт, изготовленная по индивидуальному заказу, которая состоит из $n$ карт пронумерованных от 1 до $n$ и $m$ джокеров. Так как zscoder одинок, он хочет поиграть с сам с собой, используя эти карты.

Изначально колода перетасовывается в случайном порядке и кладется на стол. У zscoder есть изначально пустое множество $S$.

Каждую секунду zscoder вытягивает верхнюю карту из колоды.

Если на карте написано число $x$, zscoder снимает карту и добавляет $x$ в множество $S$. Если извлеченная карта является джокером, zscoder помещает все карты обратно в колоду и перетасовывает (равномерно случайным образом) все $n + m$ карт, получая новую колоду (следовательно, новая колода также содержит все карты от 1 до $n$ и $m$ джокеров). Затем, если $S$ в настоящее время содержит все элементы от 1 до $n$, игра заканчивается.

Перетасовка колоды не занимает времени.

Какое матожидание количества секунд до окончания игры? Можно показать, что ответ можно записать в виде $\frac{P}{Q}$, где $P, Q$ — взаимно простые целые числа, где $Q \neq 0 \pmod{998244353}$. Выведите значение $(P \cdot Q^{-1})$ по модулю 998 244 353.

## Формат входных данных

Единственная строка содержит два целых числа, $n$ и $m$ $(1 \leqslant n, m \leqslant 2 \cdot 10^6)$.

## Формат выходных данных

Выведите единственное целое число, значение $(P \cdot Q^{-1})$ по модулю 998 244 353.

## Примеры

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|---|---|
| `2 1` | `5` |
| `3 2` | `332748127` |
| `14 9` | `969862773` |

## Замечание

Для первого примера можно доказать, что ожидаемое время до окончания игры составляет 5 секунд.

Для второго примера можно доказать, что ожидаемое время до окончания игры составляет $\frac{28}{3}$ секунды.

# Задача B. Слайм и бисквиты

| | |
|---|---|
| Имя входного файла: | `стандартный ввод` |
| Имя выходного файла: | `стандартный вывод` |
| Ограничение по времени: | 2 секунды |
| Ограничение по памяти: | 256 мегабайт |

Слайм и его $n$ друзей на вечеринке. Слайм придумал игру для своих друзей.

В начале игры у $i$-го игрока есть $a_i$ бисквитов. Каждую секунду Слайм выберет один бисквит равновероятно среди $a_1+a_2+\ldots+a_n$ бисквитов, и владелец этого бисквита передает его случайному игроку, равновероятно среди $n-1$ игроков кроме себя. Игра закончится, когда у одного игрока будут все бисквиты.

Как хозяин вечеринки, Слайм хочет узнать математическое ожидание времени, когда игра закончится, чтобы успеть провести следующее мероприятие.

Так как ответ может быть представлен в виде рациональной дроби $\frac{p}{q}$ для взаимно простых $p$ и $q$, выведите его в форме $(p \cdot q^{-1}) \mod 998\,244\,353$. Можно доказать, что $q \neq 0 \pmod{998\,244\,353}$.

## Формат входных данных

В первой строке записано одно целое число $n$ ($2 \leqslant n \leqslant 100\,000$): количество игроков.

Во второй строке записаны n неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant 300\,000$), где $a_i$ обозначает количество бисквитов у $i$-го человека в начале игры.

## Формат выходных данных

Выведите одно число: математическое ожидание времени, когда игра закончится, по модулю 998 244 353.

## Примеры

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|---|---|
| 2<br>1 1 | 1 |
| 2<br>1 2 | 3 |
| 5<br>0 0 0 0 35 | 0 |
| 5<br>8 4 2 0 1 | 801604029 |

## Замечание

В первом примере, вероятность, что игрок 1 передаст игроку 2 бисквит равна $\frac{1}{2}$, а вероятность что игрок 2 передаст игроку 1 бисквит равна $\frac{1}{2}$. В любом случае игра продлится ровно 1 секунду, так как все бисквиты будут у одного игрока спустя 1 секунду, поэтому ответ равен 1.

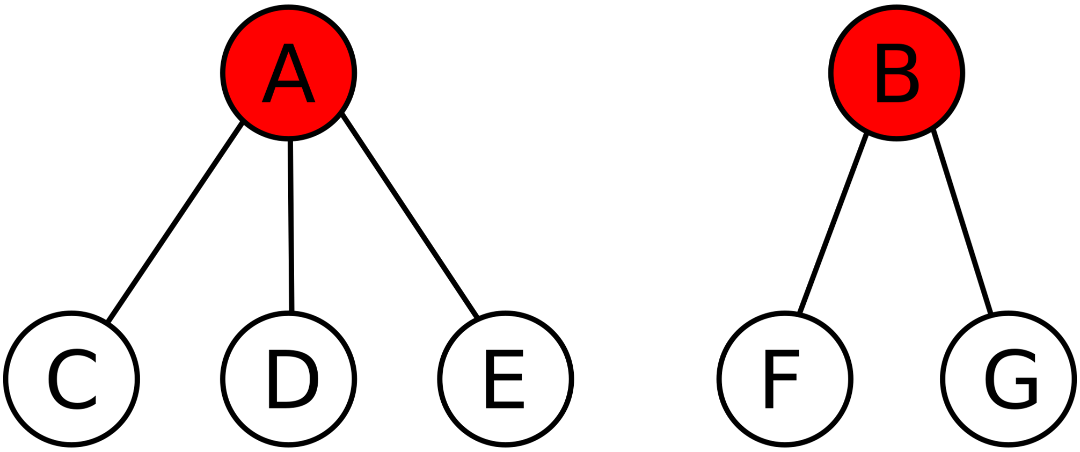
# Задача C. Приобретения стартапов

| | |
|---|---|
| Имя входного файла: | `стандартный ввод` |
| Имя выходного файла: | `стандартный вывод` |
| Ограничение по времени: | 1 секунда |
| Ограничение по памяти: | 256 мегабайт |

Существует $n$ стартапов. Стартапы могут быть либо активными либо приобретенными. Если стартап приобретенный, это означает, что его владельцем является ровно один активный стартап. Активный стартап может быть владельцем любого количества приобретенных стартапов. Активный стартап не может быть приобретенным.

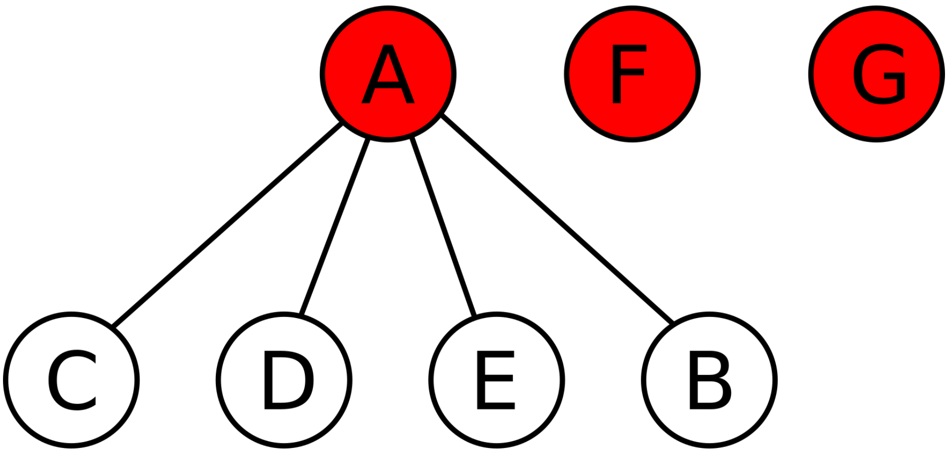
Следующие действия происходят, пока существует больше одного активного стартапа. Последовательность шагов, приведенная ниже, занимает один день.

Случайным образом равновероятно выбираются два различных активных стартапа $A$ и $B$. С равной вероятностью либо $A$ приобретает $B$, либо $B$ приобретает $A$ (так, если $A$ приобретает $B$, то статус $B$ меняется с активного на приобретенный, и его владельцем становится $A$). Когда статус стартапа меняется с активного на приобретенный, все стартапы, которыми он владел, становятся активными. Например, может произойти следующее. Пусть $A$ и $B$ — активные стартапы, $C$, $D$, $E$ — приобретенные с владельцем $A$, а $F$, $G$ — приобретенные с владельцем $B$:

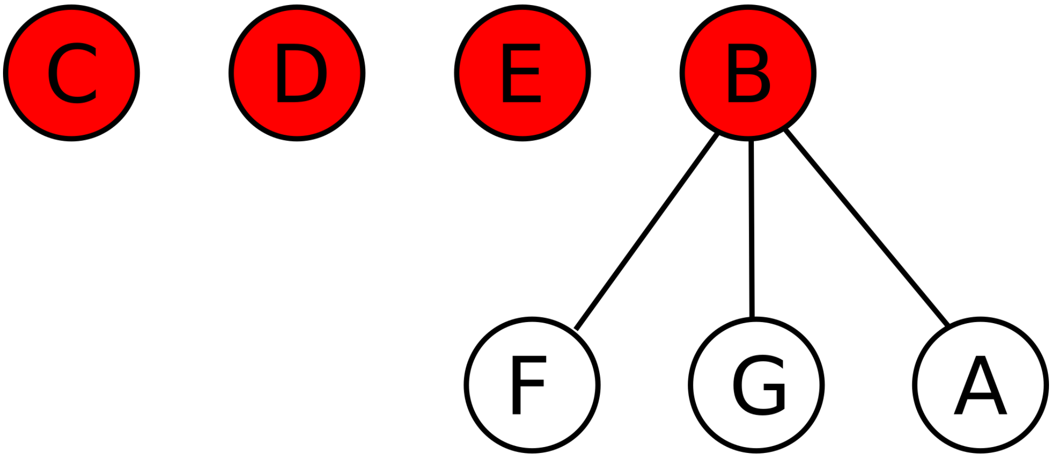



Активные стартапы показаны красным.

Если $A$ приобретет $B$, то будет следующий результат: $A$, $F$, $G$ — активные стартапы, $C$, $D$, $E$, $B$ — приобретенные с владельцем $A$, $F$ и $G$ не владеют никакими стартапами:




Если же $B$ приобретет $A$, то $B$, $C$, $D$, $E$ будут активными стартапами, $F$, $G$, $A$ будут приобретенными с владельцем $B$; $C$, $D$, $E$ не будут владеть никаким стартапами:




Вам даны начальные состояния стартапов. Для каждого стартапа известно, он активный или приобретенный, в последнем случае известен номер владельца.

Найдите математическое ожидание времени, необходимого для того, чтобы остался только один активный стартап и процесс завершился.

Можно показать, что математическое ожидание этого времени можно выразить как рациональное число $P/Q$, где $P$ и $Q$ — взаимно простые целые числа, и $Q \not\equiv 0 \pmod{10^9+7}$. Выведите число $P \cdot Q^{-1}$ по модулю $10^9+7$.

## Формат входных данных

Первая строка содержит одно целое число $n$ ($2 \leqslant n \leqslant 500$) — количество стартапов.

Следующая строка содержит $n$ целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_i = -1$ или $1 \leqslant a_i \leqslant n$). Если $a_i = -1$, то это означает, что стартап i является активным. В противном случае, если $1 \leqslant a_i \leqslant n$, то стартап $i$ приобретен, а его владельцем является стартап $a_i$. Гарантируется, что если $a_i \neq -1$, то $a_{a_i} = -1$ (то есть все владельцы являются активными стартапами).

## Формат выходных данных

Выведите единственное число — математическое ожидание времени, через которое будет существовать только один активный стартап, по модулю $10^9+7$.

## Примеры

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|---|---|
| 3<br>-1 -1 -1 | 3 |
| 2<br>2 -1 | 0 |
| 10<br>3 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 2 2 | 507 |

## Замечание

В первом примере есть три активных стартапа, пронумерованных 1, 2 и 3, и ни одного приобретенного. Может произойти, например, следующий сценарий:

Стартап 1 приобретет стартап 2 (состояние описывается массивом $[-1, 1, -1]$). Стартап 3 приобретет стартап 1 (состояние описывается массивом $[3, -1, -1]$) Стартап 2 приобретет стартап 3 (состояние описывается массивом $[-1, -1, 2]$). Стартап 2 приобретет стартап 1 (состояние описывается массивом $[2, -1, 2]$). После этого останется только один активный стартап. Эта последовательность шагов заняла 4 дня. Можно показать, что ожидаемое число дней равно 3.

Во втором примере только один активный стартап, поэтому необходимо ноль дней.

# Задача D. Радужные шары

| | |
|---|---|
| Имя входного файла: | `стандартный ввод` |
| Имя выходного файла: | `стандартный вывод` |
| Ограничение по времени: | 2 секунды |
| Ограничение по памяти: | 256 мегабайт |

Есть мешок с шарами $n$ различных цветов. В мешке $a_i$ шаров цвета $i$.

Пока в мешке есть хотя бы два шара различных цветов, вы выполняете следующие шаги:

Возьмите два случайных шара из мешка. Может получиться, что цвета совпали. Покрасьте второй шар в цвет первого. Менять порядок шаров не разрешается. Положите оба шара обратно в коробку. Все эти действия занимают у вас ровно одну секунду. Пусть $\mathrm{M} = 10^9 + 7$. Можно доказать, что математическое ожидание времени всего процесса может быть представлено в виде рационального числа, где $P$ и $Q$ — взаимно простые целые числа, и $Q$ не делится на $M$. Выведите величину $(p \cdot q^{-1}) \pmod{M}$.

## Формат входных данных

Первая строка содержит одно целое число $n$ ($1 \leqslant n \leqslant 10\,000$) — количество цветов.

Вторая строка содержит $n$ целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ ($1 \leqslant a_i \leqslant 10^5$) — количество шаров каждого цвета.

## Формат выходных данных

Выведите одно число — ответ на задачу.

## Примеры

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|---|---|
| 2<br>1 1 | 1 |
| 3<br>1 2 3 | 750000026 |

## Замечание

В первом примере независимо от происходящего шары будут одного цвета после одного шага.

Во втором примере есть 6 шаров. Обозначим шары числами от 1 до 6, без ограничения общности, пусть шары 1, 2, 3 изначально имеют цвет 1, шары 4, 5 имеют цвет 2, а шар 6 имеет цвет 3.

Пример того, какой может быть процесс:

1. Достали шар 5 и шар 6. Шар 6 становится цвета 2.
2. Достали шар 4 и шар 5. Шар 5 остается того же цвета (цвета 2).
3. Достали шар 1 и шар 5. Шар 5 становится цвета 1.
4. Достали шар 6 и шар 5. Шар 5 становится цвета 2.
5. Достали шар 3 и шар 4. Шар 4 становится цвета 1.
6. Достали шар 4 и шар 6. Шар 6 становится цвета 1.
7. Достали шар 2 и шар 5. Шар 5 становится цвета 1.

В этот момент процесс заканчивается, так как все шары одного цвета. Эти шаги заняли 7 секунд. Можно показать, что ответ в этом случае равен $\frac{83}{4}$.

# Задача E. Перекрашиваем

| | |
|---|---|
| Имя входного файла: | `стандартный ввод` |
| Имя выходного файла: | `стандартный вывод` |
| Ограничение по времени: | 10 секунд |
| Ограничение по памяти: | 256 мегабайт |

Вам даны $n$ шаров, пронумерованных от 1 до $n$. Изначально $i$-й шар покрашен в цвет $a_i$. (Цвета обозначаются числами от 1 до $n$).

Следующая операция повторяется несколько раз, пока цвета всех шаров не станут одинаковыми:

- Равновероятно выберите одно произвольное из всевозможных $2^n$ подмножеств данного множества шаров. Пусть в нём $k$ шаров, выбраны шары $x_1, \ldots, x_k$.
- Дальше равновероятно выберите цвета $[b_1, \ldots, b_k]$ равновероятно по всем наборам из $k$ **различных** цветов от 1 до $n$.
- Для всех $i$ от 1 до $k$ перекрасьте шар $x_i$ в цвет $b_i$.

Найдите матожидание числа таких операций по модулю 998 244 353. Можно доказать, что ответ всегда представим в виде $\frac{P}{Q}$ для взаимно простых целых $P$, $Q$, где $Q$ не делится на 998 244 353; Вам необходимо вывести $PQ^{-1} \pmod{998\,244\,353}$.

## Формат входных данных

В первой строке записано одно число $n$ ($1 \leqslant n \leqslant 2000$).

В следующей строке записаны $a_1, \ldots, a_n$ ($1 \leqslant a_i \leqslant n$) — цвета шаров.

## Формат выходных данных

Выведите одно число — ответ на задачу.

## Примеры

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|---|---|
| 2<br>1 2 | 4 |
| 3<br>1 1 1 | 0 |
| 10<br>3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 | 900221128 |

## Замечание

В первом примере операция повторяется, пока не выбрано подмножество размера 1, причём в данной итерации данный шар должен перекраситься. Вероятность того, что итерация будет именно такой, равна $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}$, значит, матожидание количества операций равно 4.

Во втором примере все шары уже одного цвета, никаких операций выполнять не надо.